Proef POL

2018 — Analyse - Ruimtemeetkunde - Rijen en reeksen - Complexe getallen — Reeks B

5 vragen - 4 uren

1. De tekeningen die bij sommige vragen zijn opgenomen dienen enkel ter illustratie. De figuren zijn niet op schaal getekend. Probeer dus niet na te meten.
2. Handboeken en rekentoestellen zijn niet toegestaan. Het gebruik van een lat, een gradenboog, een geodriehoek en een passer is wel toegelaten.
3. Laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten) Gegeven het complex getal $a = \frac{1}{2}(1+i)$.

(a) (1 punt) Bereken de modulus van het complexe getal $a - 1$

(b) (1 punt) Stel dat $z_0 = 1, \forall n \in \mathbb{R}_0 : z_n = a^n$ en $u_n = |z_n - z_{n-1}|$. Toon aan dat de rij (u_n) een geometrische rij is en bepaal de eerste term u_1 en de rede.

(c) (1 punt) Bereken de som $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

(d) (1 punt) Bereken de limiet van s_n voor $n \to +\infty$, indien deze bestaat.

Vraag 2 (4 punten) Gegeven:

$$b : \frac{x-4a-1}{a} = \frac{y-2a-2}{1} = \frac{z}{-a} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$c : \begin{cases} x + y + 2a - 1 = 0 \\ z + a + 3 = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$d : \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \quad (a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\})$$

(a) (1 punt) Bewijs $\forall a \in \mathbb{R}_0$: b en c zijn kruisend.

(b) (1 punt) Zoek een Cartesiaanse vergelijking van het vlak α dat b omvat en evenwijdig is met d.

(c) (1 punt) Zoek een Cartesiaanse vergelijking van het vlak β dat c omvat en evenwijdig is met d.

(d) (1 punt) Toon aan dat de vlakken α en β altijd ($\forall a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$) snijdend zijn en dat de snijlijn door een vast punt gaat. Welk is dat punt?

Vraag 3 (4 punten) De kromming van een functie wordt als volgt gedefinieerd:

$$\left| \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)\right)^{\frac{3}{2}}} \right| \tag{1}$$

(a) (1 punt) Bereken de kromming van de functie $f(x) = \ln x$.

(b) (2 punten) Bereken de afgeleide van de kromming van f.

(c) (1 punt) Voor welke waarden van x is de kromming van f maximaal? Indien een maximum niet bestaat, bereken de limieten van de kromming aan de grenzen van het domein.

Vraag 4 (4 punten) Gegeven:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 punt) Bereken: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^1\,\mathrm{d}x$

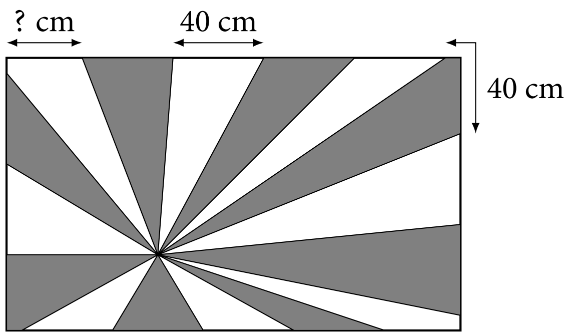
(b) (1 punt) Bereken: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2\,\mathrm{d}x$

(c) (2 punten) Bewijs door volledige inductie: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = n!$

Vraag 5 (4 punten) De vlag van Goed in Wiskunde is een rechthoek van 2 meter (horizontaal) bij 1,2 meter (verticaal). Een willekeurig punt strikt binnen de rechthoek wordt met de omtrek van de rechthoek om de 40 centimeter verbonden.

De aldus gevormde driehoeken en vierhoeken zijn afwisselend wit en grijs gekleurd. Het totaal van de grijze gebieden is groter dan het totaal van de witte gebieden: het verschil is precies een honderdste van het oppervlak van de rechthoek.

Van de linkerbovenhoek horizontaal naar rechts, hoe ver ga je naar de eerste kleurverandering (van wit naar grijs) in centimeters?



Proof POL

2019 — Analyse - Ruimtemeetkunde - Rijen en reeksen - Complexe getallen — Reeks B

5 vragen - 4 uren

1. De tekeningen die bij sommige vragen zijn opgenomen dienen enkel ter illustratie. De figuren zijn niet op schaal getekend. Probeer dus niet na te meten.
2. Handboeken en rekentoestellen zijn niet toegestaan. Het gebruik van een lat, een gradenboog, een geodriehoek en een passer is wel toegelaten.
3. Laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = {}^e\!\log 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 punt) Bereken I_0

(b) (1 punt) Bereken I_1

(c) (1 punt) Toon aan dat $\forall n \in \mathbb{N}_0$ er geldt dat $(3+2n)\,I_n = 2nI_{n-1}$

(d) (1 punt) Bereken I_5

Vraag 2 (4 punten) Gegeven: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) (1 punt) Bereken de limiet van f voor $x \to +\infty$ en $x \to -\infty$

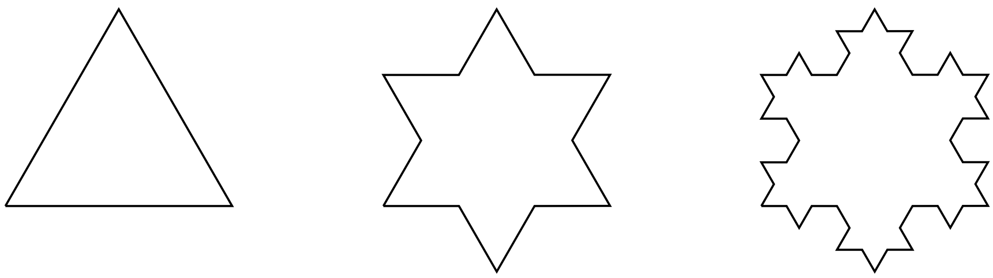
(b) (2 punten) Bereken de afgeleide van f en bewijs het volgende verband tussen f en zijn afgeleide f':

$$f'(x) = f(x)\big(1 - f(x)\big)$$

(c) (1 punt) Stel $g(x) = 2f(x) - 1$. Bepaal het verband tussen g en g'.

Vraag 3 (4 punten) De Koch sneeuwvlok kan worden geconstrueerd door te beginnen met een gelijkzijdige driehoek en vervolgens elke zijde recursief als volgt aan te passen:

1. Verdeel het lijnstuk in drie even lange lijnstukken.
2. Teken een gelijkzijdige driehoek met als basis het middenste lijnstuk van stap 1.
3. Verwijder het lijnstuk dat de basis is van de driehoek uit stap 2.



1ste iteratie — 2de iteratie

De oppervlakte van de oorspronkelijk driehoek bedraagt 1.

(a) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na 1 iteratie.

(b) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na 2 iteraties.

(c) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na n iteraties.

(d) (1 punt) Wat is de limiet van de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na $n \to +\infty$ iteraties?

Vraag 4 (4 punten) Een toetsenbord heeft 42 toetsen waarvan 26 de letters van het alfabet voorstellen. De andere stellen cijfers of symbolen voor.

(a) (1 punt) De 3-jarige Arnaud drukt een willekeurige toets van het toetsenbord in, elke toets heeft dezelfde waarschijnlijkheid om ingedrukt te worden. Wat is de waarschijnlijkheid dat hij een letter van zijn naam heeft ingedrukt?

(b) Arnaud drukt achtereenvolgens 6 toetsen in, die al dan niet verschillende kunnen zijn, wat is de waarschijnlijkheid van volgende gebeurtenissen:

i. (1 punt) Arnaud drukt 1 letter twee keer en 4 andere verschillende letters in;

ii. (1 punt) Arnaud drukt zijn voornaam in;

iii. (1 punt) Arnaud drukt zijn voornaam in, wetende dat hij 1 letter twee keer en 4 andere verschillende letters heeft ingedrukt.

Vraag 5 (4 punten) Gegeven: $A(3, 2, 1)$, $B(1, 0, 3)$ en

$$e : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

(a) (1 punt) De meetkundige plaats van alle punten C zodat het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$ op e ligt, is een cirkel met middelpunt $(1, 1, 1)$ en straal $\sqrt{5}$, gelegen in het vlak $\alpha : x - 2y - z + 2 = 0$. Bewijs.

(b) (1 punt) Bepaal het punt S van deze meetkundige plaats dat in $\beta : 2x + y + 2 = 0$ ligt.

(c) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van $\triangle ABS$.

(d) (1 punt) Bepaal tan $\widehat{ASB}$.

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Analyse

Bijkomende proef POL - 2020
Oplossing van Vraag 2

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
  - Rijen
  - Limieten
- Algebra
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

Een patiënt neemt de eerste dag 10 mg van een geneesmiddel en daarna elke dag 5 mg. In de loop van de dag wordt in het lichaam 40% van het geneesmiddel afgebroken. We kunnen de hoeveelheden van het geneesmiddel die zich in het lichaam bevinden onmiddellijk na de inname op de 1ste, 2de, 3de, ... dag voorstellen door een rij $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

(a) (1 punt) Schrijf een recursief voorschrift voor deze rij.

Oplossing

(b) (1 punt) Bewijs door volledige inductie dat deze rij naar boven begrensd is.

Hint Oplossing

(c) (1 punt) Bewijs dat de rij stijgend is.

Hint Oplossing

(d) (1 punt) Bepaal de limiet van de rij door gebruik te maken van de rekenregels van limieten.

Oplossing

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

$$\begin{cases} u_1 & = 10 \\ u_n & = \frac{3}{5} u_{n-1} + 5 \quad \text{voor } n > 1 \end{cases}$$

Hint voor deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Gebruik het vaste punt $u = \frac{25}{2}$ als bovengrens.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Er is een vast punt $u = \frac{25}{2}$ bekomen als oplossing van de vergelijking

$$u = \frac{3}{5}u + 5.$$

We weten dat $u_1 \leq \frac{25}{2}$. Stel nu dat $u_{n-1} \leq \frac{25}{2}$ dan geldt er voor u_n:

$$u_n = \frac{3}{5}u_{n-1} + 5 \leq \frac{3}{5}\frac{25}{2} + 5 = \frac{25}{2}.$$

Dit betekent dat $\frac{25}{2}$ een bovengrens is.

Hint voor deelvraag (c)

Terug naar de vraag

Toon aan dat $u_n - u_{n-1} \geq 0$.

Oplossing van deelvraag (c)

Terug naar de vraag

We tonen aan dat $u_{n_1} \leq u_n$ of $u_n - u_{n-1} \geq 0$:

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{2}{5}u_{n-1} + 5 \geq 0.$$

Dit geldt wanneer $u_{n-1} \leq \frac{25}{2}$. Wat inderdaad voldaan is daar $\frac{25}{2}$ een bovengrens is.

Oplossing van deelvraag (d)

Terug naar de vraag

De rij kan expliciet uitgedrukt worden als volgt:

$$
\begin{aligned}
u_n &= 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + \cdots + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{1} + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{0} \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^{1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{0}\right) \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\frac{1^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}} \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{25}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)
\end{aligned}
$$

We bepalen nu de limiet voor $n \to \infty$:

$$
\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{25}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \frac{25}{2}
$$

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd
van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Analyse

Bijkomende proef POL - 2020
Oplossing van Vraag 3

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
  - Functie
  - Extrema
- Algebra
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

(a) (2 punten) Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat de functie geen extremum zou hebben?

Oplossing

(b) (2 punten) Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat de functie een maximum en een minimum zou hebben en drie verschillende nulpunten? (Hint: wat is het teken van het product van de functiewaarden in het maximum en het minimum indien er drie verschillende nulpunten zijn?)

Oplossing

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Geen extrema wil zeggen dat de eerste afgeleide geen nulpunten heeft of dat voor een nulpunt van de eerste afgeleide, de tweede afgeleide eveneens 0 is en de derde afgeleide verschillend van 0 is. De afgeleide van de functie is

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Er zijn geen reële nulpunten indien $p > 0$.
Voor $p = 0$ dienen we de tweede en de derde afgeleiden te bepalen:

$$f''(x) = 6x$$
$$f^{(3)}(x) = 6$$

Dit betekent dat voor $p \geq 0$ er geen extrema zijn.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Het product van de functiewaarden in het maximum en het minimum moet negatief zijn, het lokale maximum moet zich boven de x-as bevinden en het lokale minimum eronder:

$$\begin{cases} x_1 &= \sqrt{\frac{-p}{3}} \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{-p}{3}} \end{cases}$$

We vullen beide extrema in het functievoorschrift in:

$$\begin{cases} f\left(x_1\right) &= \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} + p\frac{(-p)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} - 1 \\ f\left(x_2\right) &= -\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} - p\frac{(-p)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} - 1 \end{cases}$$

Het product van beide na vereenvoudiging moet kleiner zijn dan 0:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} - \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} - 1\right)\left(-\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} + \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} - 1\right) &< 0 \\ \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{\frac{3}{2}} - 1\right)\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{\frac{3}{2}} - 1\right) &< 0 \\ 1 - \frac{4}{27}(-p)^3 &< 0 \\ p &< -\frac{3}{4^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Trigonometrie

Bijkomende proef POL - 2020
Oplossing van Vraag 4

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
  - Integralen
- Algebra
- Trigonometrie
  - Gebruikelijke formules
  - Goniometrische functies
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

(a) (1 punt) Toon aan dat voor elk reëel getal x, de volgende gelijkheid geldt

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right).$$

▸ Hint ▸ Oplossing

(b) (1 punt) Bepaal met behulp van de vorige gelijkheid een primitieve van de functie f in $\mathbb{R}$, zodat

$$f(x) = \cos^3 x.$$

▸ Oplossing

(c) (1 punt) Gegeven a is een reëel getal verschillend van nul, bepaal de waarde van de bepaalde integraal door partiële integratie

$$I(a) = \int_0^a (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx.$$

▸ Oplossing

(d) (1 punt) Bereken $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

▸ Oplossing

Hint voor deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Pas de formules voor de (co)sinus van de som van 2 hoeken toe.

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

We passen de formules voor de (co)sinus van de som van 2 hoeken toe:

$$\begin{aligned}
\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x \\
&= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\
&= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x \\
&= 4 \cos^3 x - 3 \cos x
\end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x) .$$

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

De integratie kan rechtstreeks gebeuren:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \int \frac{1}{4} \left(\cos 3x + 3\cos x\right) \, dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right) + C, \qquad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Oplossing van deelvraag (c)

Terug naar de vraag

Door partiële integratie bekomen we de vorige integraal:

$$\begin{aligned}\int (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx &= -\frac{1}{3}(2x+1)\cos^3 x + \int \frac{2}{3}\cos^3 x \, dx \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right) \\ &\qquad - \frac{1}{3}(2x+1)\cos^3 x + C.\end{aligned}$$

Integreren tussen 0 en a geeft:

$$I(a) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\sin 3a + 3\sin a\right) - \frac{1}{3}(2a+1)\cos^3 a + \frac{1}{3}.$$

Oplossing van deelvraag (d)

Terug naar de vraag

Vul de waarde $\frac{\pi}{3}$ voor a in:

$$I\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{18\sqrt{3} + 21 - 2\pi}{72}.$$

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd
van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Meetkunde en Analytische Meetkunde

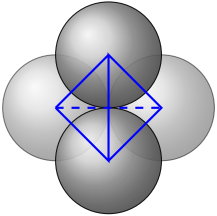
Bijkomende proef POL - 2020
Oplossing van Vraag 5

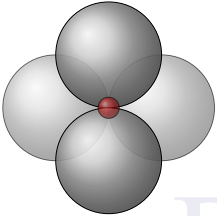
Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

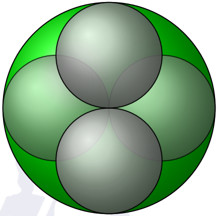
- Analyse
- Algebra
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
  - Ruimtemeetkunde
  - Bol
  - Afstand, volume
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag (deel 1/2)

4 bollen met gelijke straal r worden gestapeld zodat de middelpunten samenvallen met de hoekpunten van een gelijkzijdige tetraëder met ribbe $2r$. Bepaal de verhouding van de volumes van de kleinste bol en de grootste bol die rakend zijn aan de 4 andere bollen.







Vraag (deel 2/2)

(a) (1 punt) Bereken in de driehoek gevormd door de middelpunten van de 3 onderste bollen de afstand van het zwaartepunt tot een hoekpunt.

▸ Hint ▸ Oplossing

(b) (1 punt) In de tetraëder gevormd door de middelpunten van de 4 bollen bereken de afstand van het zwaartepunt (d.w.z. het punt dat zich op gelijke afstand bevindt van de 4 hoekpunten) tot een hoekpunt met behulp van vorig resultaat.

▸ Hint ▸ Oplossing

(c) (1 punt) Bereken het volume van de grootste bol (centrum gegeven in vorige vraag).

▸ Oplossing

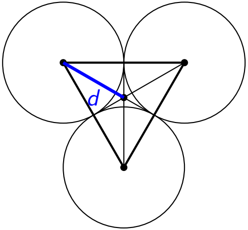
(d) (1 punt) Bereken het volume van de kleinste bol (zelfde centrum) en bereken de verhouding van beide volumes.

▸ Oplossing

Hint voor deelvraag (a)

Terug naar de vraag

- Gebruik een hulpdriehoek

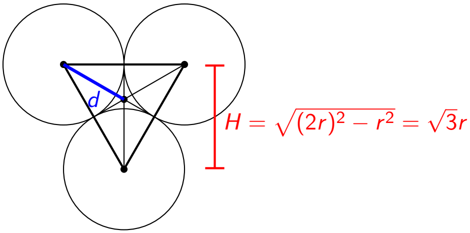


- Beschouw de gelijkvormigheid van twee driehoeken.

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Het middelpunt van de te bepalen bollen bevindt zich om symmetrieredenen evenver van alle hoekpunten van de tetraëder. Om dit middelpunt te bepalen zullen we 2 hulpdriehoeken gebruiken



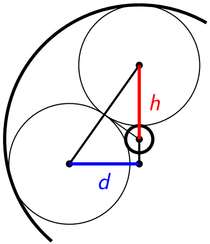
De eerste is een gelijkzijdige driehoek die de middelpunten van 3 bollen als hoekpunten heeft en als zijde $2r$. We kunnen de afstand d van een hoekpunt tot het middelpunt bepalen door de gelijkvormigheid van de driehoeken te beschouwen:

$$\frac{r}{d} = \frac{H}{2r} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2r^2}{H} = \frac{2}{\sqrt{3}}r.$$

Hint voor deelvraag (b)

◂ Terug naar de vraag

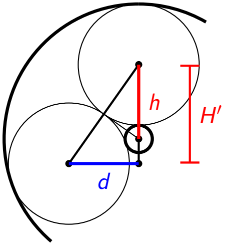
- Gebruik een hulpdriehoek



- Beschouw de gelijkvormigheid van twee driehoeken.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag



De tweede is een rechthoekige driehoek met als schuine zijde $2r$ en d als een andere zijde. Het middelpunt bevindt zich evenver van de hoekpunten van de schuine zijde. De afstand tot de top van de tetraëder kan dan bepaald worden door de gelijkvormigheid van de driehoeken te beschouwen:

$$\frac{H'}{2r} = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2r^2}{H'} = \frac{2r^2}{\sqrt{(2r)^2 - d^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}r.$$

Oplossing van deelvraag (c)

Terug naar de vraag

De straal van de grote bol is dan:

$$R_B = h + r = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right) r$$

en het volume van de grootste bol is gegeven door

$$V_B = \frac{4}{3}\pi R_B^3.$$

Oplossing van deelvraag (d)

Terug naar de vraag

De straal van de klein bol is dan:

$$R_b = h - r = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) r$$

en het volume van de kleinste bol is gegeven door $V_b = \frac{4}{3}\pi R_b^3$.
De verhouding van hun volumes bedraagt:

$$\frac{V_b}{V_B} = \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{3}{2}} + 1}\right)^3$$
$$= \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^3$$
$$= 485 - 198\sqrt{6}.$$

Proef POL

2020 | Analyse - Ruimtemeetkunde - Rijen en reeksen - Complexe getallen | Reeks A

5 vragen - 4 uren

1. De tekeningen die bij sommige vragen zijn opgenomen dienen enkel ter illustratie. De figuren zijn niet op schaal getekend. Probeer dus niet na te meten.
2. Handboeken en rekentoestellen zijn niet toegestaan. Het gebruik van een lat, een gradenboog, een geodriehoek en een passer is wel toegelaten.
3. Laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = {}^e\!\log 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten)

(a) (2 punten) Bepaal $k \in \mathbb{R}$, zodat voor elke complex getal $z = a + b\text{i}$ met $b = -2a$ geldt:

$$|z - k + 7\text{i}| = |z - 2 + 9\text{i}|$$

(b) (2 punten) $-\text{i}$ is een wortel van $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Zoek de andere wortels.

Vraag 2 (4 punten) Een patiënt neemt de eerste dag 10 mg van een geneesmiddel en daarna elke dag 5 mg. In de loop van de dag wordt in het lichaam 40% van het geneesmiddel afgebroken. We kunnen de hoeveelheden van het geneesmiddel die zich in het lichaam bevinden onmiddellijk na de inname op de 1ste, 2de, 3de, ... dag voorstellen door een rij $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

(a) (1 punt) Schrijf een recursief voorschrift voor deze rij.

(b) (1 punt) Bewijs door volledige inductie dat deze rij naar boven begrensd is.

(c) (1 punt) Bewijs dat de rij stijgend is.

(d) (1 punt) Bepaal de limiet van de rij door gebruik te maken van de rekenregels van limieten.

Vraag 3 (4 punten) Gegeven: $f(x) = x^3 + px - 1$.

(a) (2 punten) Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat de functie geen extremum zou hebben?

(b) (2 punten) Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat de functie een maximum en een minimum zou hebben en drie verschillende nulpunten? (Hint: wat is het teken van het product van de functiewaarden in het maximum en het minimum indien er drie verschillende nulpunten zijn?)

Vraag 4 (4 punten)

(a) (1 punt) Toon aan dat voor elk reëel getal x, de volgende gelijkheid geldt

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

(b) (1 punt) Bepaal met behulp van de vorige gelijkheid een primitieve van de functie f in $\mathbb{R}$, zodat

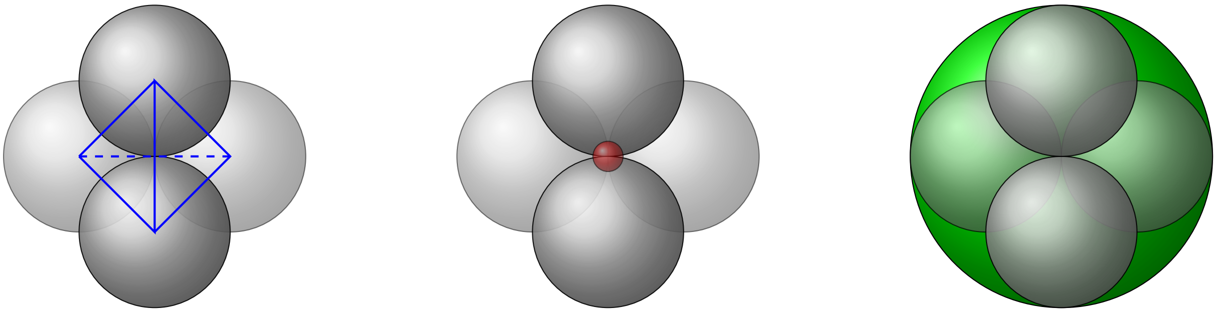
$$f(x) = \cos^3 x$$

(c) (1 punt) Gegeven a is een reëel getal verschillend van nul, bepaal de waarde van de bepaalde integraal door partiële integratie

$$I(a) = \int_0^a (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx$$

(d) (1 punt) Bereken $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Vraag 5 (4 punten) 4 bollen met gelijke straal r worden gestapeld zodat de middelpunten samenvallen met de hoekpunten van een gelijkzijdige tetraëder met ribbe $2r$. Bepaal de verhouding van de volumes van de kleinste bol en de grootste bol die rakend zijn aan de 4 andere bollen.



(a) (1 punt) Bereken in de driehoek gevormd door de middelpunten van de 3 onderste bollen de afstand van het zwaartepunt tot een hoekpunt.

(b) (1 punt) In de tetraëder gevormd door de middelpunten van de 4 bollen bereken de afstand van het zwaartepunt (d.w.z. het punt dat zich op gelijke afstand bevindt van de 4 hoekpunten) tot een hoekpunt met behulp van vorig resultaat.

(c) (1 punt) Bereken het volume van de grootste bol (centrum gegeven in vorige vraag).

(d) (1 punt) Bereken het volume van de kleinste bol (zelfde centrum) en bereken de verhouding van beide volumes.

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Algebra

Bijkomende proef POL - 2021
Oplossing van Vraag 1

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
  - Exponenten en logaritmen
- Algebra
  - Veeltermen
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

Gegeven: de veelterm $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$, met $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) (2 punten) Bewijs dat $P'(1/2) < 4$.
Hint: bereken eerst $(x-1)P(x)$.
Hint Oplossing

(b) (2 punten) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

Hint: gebruik de logaritmische functie.
Hint Oplossing

Hint voor deelvraag (a)

Terug naar de vraag

- Voor $x \neq 1$, toon aan dat $P(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
- Bereken dan de afgeleide van deze uitdrukking.
- Substitueer $x = \frac{1}{2}$ in de uitdrukking voor $P'(x)$.

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Volgens de hint, berekenen we :

$$(x-1)P(x) = x^{n+1}+x^n+\ldots+x-(x^n+x^{n-1}+\ldots+1) = x^{n+1}-1.$$

Als gevolg, voor $x \neq 1$, $P(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Dus, voor $x \neq 1$,

$$P'(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Voor $x = 1/2$ geeft dit

$$P'(1/2) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{(n+1)}{2^n} + 1}{\frac{1}{4}} = 4\left(\frac{1}{2^{n+1}}(n-2(n+1))+1\right)$$
$$= 4\left(1-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right) < 4.$$

Hint voor deelvraag (b)

Terug naar de vraag

- Als we de logaritme nemen van de uitdrukking die we moeten aantonen, krijgen we

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} k \ln(2) < 2 \ln(2).$$

- Laat vervolgens 4 verschijnen in het rechterlid door te vermenigvuldigen met $\frac{2}{\ln(2)}$.
- Merk dan op dat $P'(1/2)$ in het linkerlid voorkomt. Om dit te verwezenlijken, merk op dat

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

We moeten bewijzen dat

$$\prod_{k=1}^{n} (2^k)^{\frac{1}{2^k}} < 4,$$

of equivalent, omdat de functie ln strikt stijgend is op haar domein,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} k \ln(2) < 2 \ln(2).$$

Door beide zijden te vermenigvuldigen met $\frac{2}{\ln(2)}$ krijgen we

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} < 4.$$

Het linkerlid is gelijk aan $P'(1/2)$ en dat de bovenstaande ongelijkheid geldt, volgt dan uit (**a**).

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Analyse

Bijkomende proef POL - 2021
Oplossing van Vraag 2

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
  - Rijen en inductie
  - Integralen
- Algebra
- Trigonometrie
  - Formules
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

De algemene term van de rij $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wordt gegeven door

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

(a) (1 point) Bereken de eerste drie termen van de rij en toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

Hint Oplossing

(b) (1 point) Toon aan de hand van partiële integratie aan dat voor alle natuurlijke n verschillend van nul geldt dat

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}.$$

Hint Oplossing

(c) (2 points) Bewijs met inductie dat voor alle $p \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{g(p)}{h(p)}$$

met $g(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ en $h(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.
Ter herinnering: $\Pi_{k=1}^{N} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

Hint Oplossing

Hint voor deelvraag (a)

Terug naar de vraag

- Ga voor I_0 en I_1 te werk door directe berekening.
- Gebruik voor I_2 de formule van Carnot.
- Voor het laatste deel van de deelvraag, gebruik een verandering van variabele.

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Door directe berekening,

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Met behulp van een verandering van variabele $x := \frac{\pi}{2} - t$, bekomen we

$$I_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(\pi/2 - x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Hint voor deelvraag (b)

Terug naar de vraag

- Bereken I_{n+1} door partiële integratie, $\int u dv = uv - \int v du$, met $u = \sin^n t$ en $v = \sin t$.
- Dit geeft een uitdrukking voor I_{n+1} die I_{n-1} en I_{n+1} omvat.
- Leid $(n+1)I_{n+1}$ af als een functie van n en I_{n-1}.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Door partieel te integreren, voor $n \in \mathbb{N}_0$, vinden we

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^n t \sin t \, dt \\
&= \big[-\cos t \sin^n t \big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} n \sin^{n-1} t \, \cos^2 t \, dt \\
&= n \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \, (1 - \sin^2 t) dt \\
&= n \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \, dt \right) \\
&= n I_{n-1} - n I_{n+1},
\end{aligned}$$

en het resultaat volgt direct.

Hint voor deelvraag (c)

Terug naar de vraag

Pas, zoals gesuggereerd, de methode van bewijs door inductie toe:

- Ga na dat de eigenschap waar is voor $p = 1$.
- Toon dan aan dat als de eigenschap waar is voor een zekere $p \in \mathbb{N}_0$, ze ook waar is voor $p + 1$. Om dit te doen:
  - bereken $I_{2(p+1)}$ met behulp van het resultaat van deelvraag (b);
  - men moet kunnen bewijzen dat

$$I_{2(p+1)} = \frac{\pi}{2} \frac{g(p+1)}{h(p+1)}.$$

Oplossing van deelvraag (c)

Terug naar de vraag

De eigenschap is waar voor $p = 1$ omdat $I_2 = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}\frac{g(1)}{h(1)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}$.
Laten we aannemen (recurrentiehypothese) dat de eigenschap waar is voor $p \in \mathbb{N}_0$. We berekenen

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} \overset{(1)}{=} \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \overset{(2)}{=} \frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2p+2}\frac{g(p)}{h(p)} \overset{(3)}{=} \frac{\pi}{2}\frac{g(p+1)}{h(p+1)},$$

waarbij

(1) gerechtvaardigd wordt door deelvraag (b)

(2) de recurrentiehypothese gebruikt

(3) gebaseerd is op de volgende twee relaties:

$$(2p+1)g(p) = \big(2(p+1)-1\big)\prod_{k=1}^{p}(2k-1) = \prod_{k=1}^{p+1}(2k-1) = g(p+1),$$

$$(2p+2)h(p) = 2(p+1)\prod_{k=1}^{p} 2k = \prod_{k=1}^{p+1} 2k = h(p+1).$$

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Algebra

Bijkomende proef POL - 2021

Oplossing van Vraag 3

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
- Algebra
  - Complexe getallen
  - Veeltermen
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag (deel 1/2)

(a) (1 punt) Gegeven: de volgende vergelijking in $\mathbb{C}$, met $i^2 = -1$: $|1 + iz| = |1 - iz|$. Toon aan dat de oplossingen van de vergelijking reëel zijn.

Oplossing

(b) (1 punt) Gegeven: de volgende vergelijking in $\mathbb{C}$ (met onbekende z), met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = \frac{1 + ia}{1 - ia}. \qquad (\ddagger)$$

Toon aan dat de oplossingen van de vergelijking reëel zijn, zonder die te berekenen.
Hint: maak gebruik van het puntje (a) door een modulusberekening.

Oplossing

Vraag (deel 2/2)

(c) (1 punt) Toon aan dat de vergelijking (‡) geschreven kan worden onder de vorm $\operatorname{cis}(2n\theta) = \operatorname{cis}(2\alpha)$, voor een bepaalde $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Ter herinnering: $\operatorname{cis}(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.
Hint: op basis van het vorige puntje kan men stellen dat $z = \tan\theta$, met $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, en op dezelfde manier te werk gaan voor a.

▸ Oplossing

(d) (1 punt) Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking (‡)? Zoek die oplossingen.

▸ Oplossing

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Wij geven twee methoden aan om de vergelijking op te lossen, waaruit zal blijken dat de oplossingen van de vergelijking reëel zijn.

Methode 1 Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. We vinden

$$\begin{aligned}
|1 + iz| = |1 - z| &\iff |1 + i(x + iy)| = |1 - (x + iy)| \\
&\iff |1 - y + ix| = |1 + y - ix| \\
&\iff (1 - y)^2 + x^2 = (1 + y)^2 + x^2 \\
&\iff y = 0.
\end{aligned}$$

De oplossing is dus $S = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = 0\}$.

Methode 2 Gezien $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, bekomen we

$$\begin{aligned}
|1 + iz| = |1 - z| &\iff |1 + iz|^2 = |1 - iz|^2 \\
&\iff (1 + iz)\overline{(1 + iz)} = (1 - iz)\overline{(1 - iz)} \\
&\iff (1 + iz)(1 - i\bar{z}) = (1 - iz)(1 + i\bar{z}) \\
&\iff 1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \\
&\iff -i\bar{z} + iz = i\bar{z} - iz \\
&\iff z = \bar{z}.
\end{aligned}$$

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Met behulp van de hint, zien we dat

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \Rightarrow \left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right| = \left|\frac{1+ia}{1-ia}\right|$$

Als we vaststellen dat $\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$, dan hebben we ook dat

$$\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = 1$$

wat inhoudt dat $|1+iz| = |1-iz|$. Met behulp van (a) impliceert dit dat $z \in \mathbb{R}$.

Oplossing van deelvraag (c)

Terug naar de vraag

Zoals de hint aangeeft, bestaat er voor $z \in \mathbb{R}$ een unieke $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ zo dat $z = \tan\theta$. Merk op dat $\cos\theta \neq 0$. We berekenen

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\mathrm{cis}(\theta)}{\mathrm{cis}(-\theta)} = \mathrm{cis}(2\theta)\left(= e^{2i\theta}\right).$$

Evenzo, met $a = \tan\alpha$ voor een zekere $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ bekomen we

$$\frac{1+ia}{1-ia} = \mathrm{cis}(2\alpha)\left(= e^{2i\alpha}\right).$$

Vandaar,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \iff \mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha)\left(\iff e^{2in\theta} = e^{2i\alpha}\right).$$

Oplossing van deelvraag (d)

Terug naar de vraag

Aangezien $z \in \mathbb{R}$, $1 - iz \neq 0$ en de vergelijking is equivalent met de volgende graad n polynomiale vergelijking,

$$(1 + iz)^n - \frac{1 + ia}{1 - ia}(1 - iz)^n = 0,$$

die precies n oplossingen heeft (geteld met multipliciteit), volgens de fundamentele stelling van de algebra.
De oplossing van (‡) wordt verkregen met behulp van de cis vorm (of exponentiële vorm):

$$\operatorname{cis}(2n\theta) = \operatorname{cis}(2\alpha) \iff 2n\theta = 2\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tot besluit worden de n oplossingen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ gegeven door

$$z_k = \tan\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd
van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Meetkunde en Analytische Meetkunde

Bijkomende proef POL - 2021
Oplossing van Vraag 4

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
- Algebra
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
  - Vectoren
  - Vergelijking van een rechte
  - Vergelijking van een vlak
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag (deel 1/2)

We noteren $\lambda = \{AB, M\}$ de doorsnedeverhouding waarlangs het punt M de vector $\overrightarrow{AB}$ deelt, dat wil zeggen

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}.$$

Beschouw een prisma met driehoekige basis zoals in de figuur hieronder (links), waarop we een orthonormaal assenstelsel plaatsen zodat we de volgende punten hebben : $A_0(0,0,0)$, $C_0(0,3,0)$ en $B_1(1,2,5)$.
We nemen op de diagonaal A_0B_1 een punt P zo dat $\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4}$.
Π is het vlak dat door P gaat en evenwijdig is met de diagonalen A_1C_0 en B_0C_1. Het vlak Π snijdt de rechte C_0C_1 in het punt R.

(a) (1 punt) Toon aan dat de cartesische vergelijking van het vlak Π wordt gegeven door $20x + 5y + 3z = 25$.

Oplossing

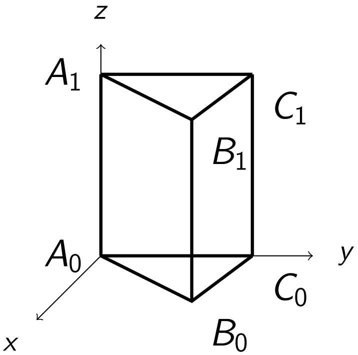
(b) (1 punt) Bepaal de doorsnedeverhouding $\{C_0C_1, R\}$.

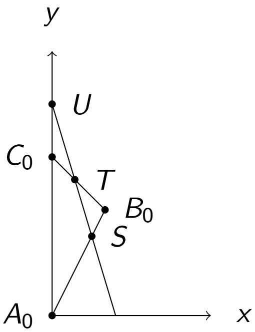
Hint Oplossing

Vraag (deel 2/2)

(c) (2 punten) Beschouw de driehoek $A_0B_0C_0$. We kiezen drie collineaire punten S, T, U zodat we kunnen schrijven $\lambda_1 = \{A_0B_0, S\}$, $\lambda_2 = \{B_0C_0, T\}$, $\lambda_3 = \{C_0A_0, U\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$, zoals hieronder afgebeeld (rechts). Het product $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ is constant. Bepaal de waarde van die constante.

Hint Oplossing





Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

We bepalen eerst de coördinaten van P (dat is het eindpunt van de vector $\vec{P}$):

$$\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4} \iff \overrightarrow{A_0P} = \frac{5}{4}\overrightarrow{PB_1} \iff \vec{P} - \vec{A_0} = \frac{5}{4}(\vec{B_1} - \vec{P})$$

en dus

$$\vec{P} = \frac{4}{9}\frac{5}{4}\vec{B_1} = \frac{5}{9}\vec{B_1} = \frac{5}{9}(1,2,5).$$

Het vlak Π is evenwijdig met de volgende vectoren:

$$\overrightarrow{A_1C_0} = (0,3,0) - (0,0,5) = (0,3,-5)$$
$$\overrightarrow{B_0C_1} = (0,3,5) - (1,2,0) = (-1,1,5).$$

Er zijn verschillende manieren om de vergelijking van het vlak te verkrijgen. Neem bijvoorbeeld aan dat $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$ een richting bepaalt die normaal is aan Π. We hebben

$$(0,3,-5) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$
$$(-1,1,5) \cdot (n_1, n_3, n_3) = 0.$$

Als we deze twee vergelijkingen optellen, bekomen we $-n_1 + 4n_2 = 0$. Als we $n_2 = 1$ laten, dan is $n_1 = 4$ en met behulp van de eerste vergelijking, $n_3 = \frac{3}{5}$. De normaalrichting is dus $(1,4,3/5)$ en de vergelijking van het vlak is

$$20x + 5y + 3z = c,$$

waarbij $c = 25$ wegens $P \in \Pi$.

Hint voor deelvraag (b)

Terug naar de vraag

We kunnen schrijven dat $R = (0, 3, z_r)$, waarbij z_r bepaald wordt door het feit dat $R \in \Pi$.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Aangezien R op de lijn C_0C_1 ligt, kunnen we schrijven dat

$$R = (0, 3, z_r),$$

waarbij z_r bepaald wordt door het feit dat $R \in \Pi$:

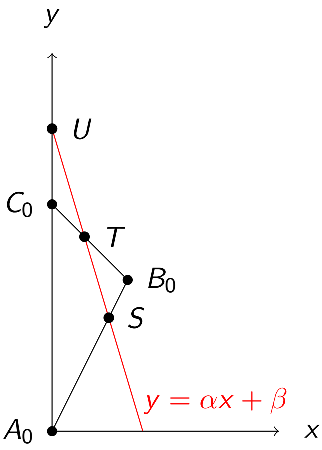
$$15 + 3z_r = 25 \Rightarrow z_r = \frac{10}{3}.$$

Daarom

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{C_0R} = \{C_0C_1, R\}\overrightarrow{RC_1} \\
\iff \quad & \left(0, 0, \frac{10}{3}\right) = \{C_0C_1, R\}\left(0, 0, 5 - \frac{10}{3}\right) \\
\iff \quad & \{C_0C_1, R\} = 2.
\end{aligned}$$

Hint voor deeldraag (c)

Terug naar de vraag



- Voor α en β kunnen numerieke waarden worden gekozen.
- Druk $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ uit in functie van α en β.

Oplossing van deelvraag (c) – (deel 1/3)

Terug naar de vraag

Om het eenvoudig te houden beschouwen we S, T, U als punten van het (x, y)-vlak, en laten we de derde coördinaat weg:

$$S = (x_s, y_s), \qquad T = (x_t, y_t), \qquad U = (x_u, y_u).$$

We bekomen

$$\begin{array}{lllll}
\lambda_1 = \{A_0B_0, S\} & \Rightarrow & S \in A_0B_0 & \Rightarrow & y_s = 2x_s \\
\lambda_2 = \{B_0C_0, T\} & \Rightarrow & T \in B_0C_0 & \Rightarrow & y_t = 3 - x_t \\
\lambda_3 = \{C_0A_0, U\} & \Rightarrow & U \in C_0A_0 & \Rightarrow & x_u = 0.
\end{array}$$

Gebruik makend van het feit dat S, T, U behoren tot dezelfde rechte met vergelijking $y = \alpha x + \beta$, hebben we verder dat :

$$\begin{aligned}
2x_s &= \alpha x_s + \beta & \Rightarrow \quad x_s &= \frac{\beta}{2 - \alpha} \\
3 - x_t &= \alpha x_t + \beta & \Rightarrow \quad x_t &= \frac{-\beta + 3}{\alpha + 1} \\
y_u &= \beta.
\end{aligned}$$

Merk op dat $\alpha \neq 2$ en $\alpha \neq -1$, anders zijn S, T niet welbepaald. Daarom is delen door $2 - \alpha$ of $\alpha + 1$ toegestaan.

Oplossing van deelvraag (c) – (deel 2/3)

Terug naar de vraag

De positie van S, T, U wordt volledig bepaald door de positie van de rechte die deze drie punten verbindt, m.a.w. door α en β. We willen het product $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ uitdrukken met behulp van deze twee parameters. Door de definitie van de λ_i's hebben we

$$\begin{aligned} x_s &= \lambda_1(1 - x_s) \\ x_t - 1 &= \lambda_2(-x_t) \\ y_u - 3 &= \lambda_3(-y_u), \end{aligned}$$

met als gevolg

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{x_s}{1 - x_s}\frac{x_t - 1}{-x_t}\frac{y_u - 3}{-y_u}.$$

Als we x_s, x_t, y_u vervangen door hun uitdrukkingen in termen van α, β, bekomen we

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{\beta}{2 - \alpha - \beta}\frac{-\beta + 3 - \alpha - 1}{\beta - 3}\frac{\beta - 3}{-\beta} = -1.$$

Oplossing van deelvraag (c) – (deel 3/3)

Terug naar de vraag

Opmerking: Zoals vermeld in vraag (c), is het product $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ constant. Daarom mag men voor de berekening willekeurig drie uitgelijnde punten S, T, U kiezen. Met andere woorden, kunnen we willekeurige waarden kiezen voor α en β. De enige beperking is dat S verschillend moet zijn van A_0 en B_0 (en evenzo voor T en U) omdat $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$.

- A_0 ligt niet op de rechte $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \beta \neq 0$
- B_0 ligt niet op de rechte $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \alpha + \beta \neq 2$
- C_0 ligt niet op de rechte $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \beta \neq 3$

We zien dat deze 3 voorwaarden impliceren dat de vereenvoudiging die we in de laatste stap van de oplossing hebben uitgevoerd, geldig is.

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd
van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Waarschijnlijkheidsrekenen

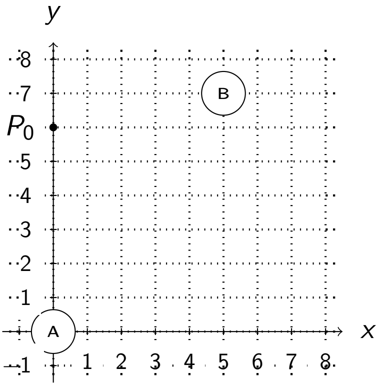
Bijkomende proef POL - 2021
Oplossing van Vraag 5

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
- Algebra
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek
    - Opsomming
    - Binomiale wet

Vraag (deel 1/2)

Alice (A) en Bob (B) bewegen zich in het coördinatenvlak door tegelijkertijd opeenvolgende stappen met lengte 1 te zetten. Alice begint op $(0,0)$ en doet telkens met gelijke kansen een willekeurige stap naar rechts of naar boven. Bob begint op $(5,7)$ en doet telkens met gelijke kansen een willekeurige stap naar links of naar beneden.



Vraag (deel 2/2)

(a) (1 punt) Wat is de kans dat Alice en Bob elkaar ontmoeten in het punt $P_0(0, 6)$?

Oplossing

(b) (1 punt) Bepaal de andere punten $(P_1, P_2, \ldots)$ waar het mogelijk is dat Alice en Bob elkaar kunnen ontmoeten.

Oplossing

(c) (2 punten) Wat is de kans dat Alice en Bob elkaar zullen ontmoeten?

Oplossing

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Alice en Bob kunnen elkaar pas ontmoeten nadat ze beiden 6 stappen zijn opgeschoven, want er zijn 12 stappen tussen hun beginposities.

Zij a_0 het aantal mogelijke trajecten van $(0,0)$ naar P_0 en zij b_0 het aantal mogelijke trajecten van $(5,7)$ naar P_0. We hebben

$$a_0 = 1 \quad \text{en} \quad b_0 = \binom{6}{1} = 6.$$

Ze kunnen elk 2^6 verschillende trajecten nemen in 6 stappen. Dus is de kans dat ze elkaar in P_0 ontmoeten is

$$\frac{1}{2^{12}} a_0 b_0 = \frac{6}{2^{12}}.$$

Opmerking: Als alternatief kan men rechtstreeks in termen van waarschijnlijkheden werken. In dat geval :

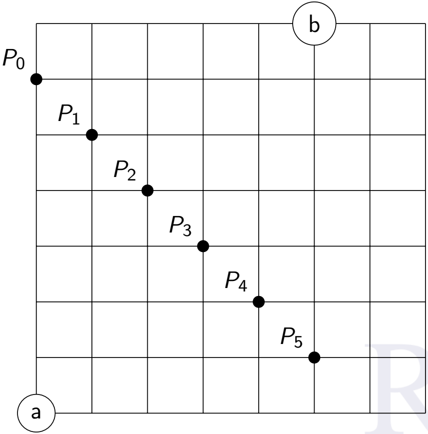
- Laat α_0 de kans zijn dat Alices P_0 bereikt (na 6 stappen): $\alpha_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$
- Stel β_0 is de kans dat Bob P_0 bereikt (na 6 stappen): $\beta_0 = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{2^6}$.
- De kans dat ze elkaar in P_0 ontmoeten is $\alpha_0\beta_0 = \frac{6}{2^{12}}$.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Alice moet i stappen naar rechts doen, en Bob moet $i + 1$ stappen naar beneden doen om elkaar te ontmoeten, met $i = 0, \ldots, 5$. De andere ontmoetingsplaatsen zijn dus :

$$P_1 = (1,5), \quad P_2 = (2,4), \quad P_3 = (3,3), \quad P_4 = (4,2), \quad P_5(5,1).$$



Oplossing van deelvraag (c)

Terug naar de vraag

Zij a_i het aantal mogelijke trajecten van $(0,0)$ naar P_i en zij b_i het aantal mogelijke trajecten van $(5,7)$ naar P_i, $i = 0, \ldots, 5$. We hebben

$$a_i = \binom{6}{i} \quad \text{en} \quad b_i = \binom{6}{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, 5.$$

De kans dat ze elkaar ontmoeten is

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{12}} \sum_{i=0}^{5} a_i b_i &= \frac{1}{2^{12}} \sum_{i=0}^{5} \binom{6}{i}\binom{6}{i+1} \\ &= \frac{1}{2^{12}}(6 + 90 + 300 + 300 + 90 + 6) = \frac{792}{2^{12}} = \frac{99}{512}.\end{aligned}$$

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in hun symbolische vorm.

Vraag 1 (4 punten)

Gegeven: de veelterm $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$, met $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) (2 punten) Bewijs dat $P'(1/2) < 4$.

Hint: bereken eerst $(x-1)P(x)$.

(b) (2 punten) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

Hint: gebruik de logaritmische functie.

Vraag 2 (4 punten)

De algemene term van de rij $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wordt gegeven door $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

(a) (1 punt) Bereken de eerste drie termen van de rij en toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

(b) (1 punt) Toon aan de hand van partiële integratie aan dat voor alle natuurlijke n verschillend van nul geldt dat

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}.$$

(c) (2 punten) Bewijs met inductie dat voor alle $p \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{g(p)}{h(p)}$$

met $g(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ en $h(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.

Ter herinnering: $\Pi_{k=1}^{N} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

Vraag 3 (4 punten)

(a) (1 punt) Gegeven: de volgende vergelijking in $\mathbb{C}$, met $i^2 = -1$: $|1 + iz| = |1 - iz|$. Toon aan dat de oplossingen van de vergelijking reëel zijn.

(b) (1 punt) Gegeven: de volgende vergelijking in $\mathbb{C}$ (met onbekende z), met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}. \qquad (\ddagger)$$

Toon aan dat de oplossingen van de vergelijking reëel zijn, zonder die te berekenen.

Hint: maak gebruik van het puntje (a) door een modulusberekening.

(c) (1 punt) Toon aan dat de vergelijking ($\ddagger$) geschreven kan worden onder de vorm $\text{cis}(2n\theta) = \text{cis}(2\alpha)$, voor een bepaalde $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ter herinnering: $\text{cis}(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Hint: op basis van het vorige puntje kan men stellen dat $z = \tan\theta$, met $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, en op dezelfde manier te werk gaan voor a.

(d) (1 punt) Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking ($\ddagger$)? Zoek die oplossingen.

Vraag 4 (4 punten)

We noteren $\lambda = \{AB, M\}$ de doorsnedeverhouding waarlangs het punt M de vector $\overrightarrow{AB}$ deelt, dat wil zeggen

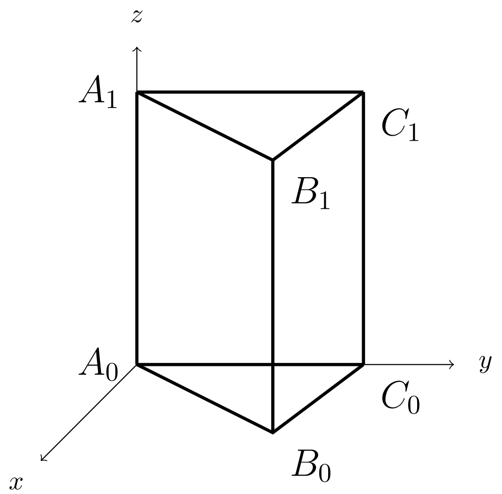
$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}.$$

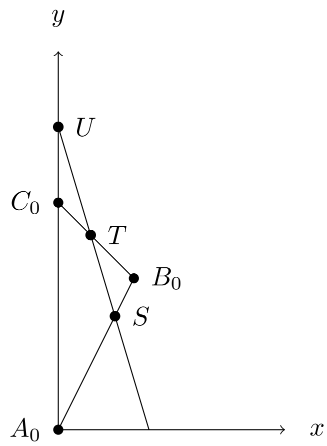
Beschouw een prisma met driehoekige basis zoals in de figuur hieronder (links), waarop we een orthonormaal assenstelsel plaatsen zodat we de volgende punten hebben : $A_0(0,0,0)$, $C_0(0,3,0)$ en $B_1(1,2,5)$.
We nemen op de diagonaal A_0B_1 een punt P zo dat $\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4}$.
Π is het vlak dat door P gaat en evenwijdig is met de diagonalen A_1C_0 en B_0C_1. Het vlak Π snijdt de rechte C_0C_1 in het punt R.

(**a**) (1 punt) Toon aan dat de cartesische vergelijking van het vlak Π wordt gegeven door $20x + 5y + 3z = 25$.

(**b**) (1 punt) Bepaal de doorsnedeverhouding $\{C_0C_1, R\}$.

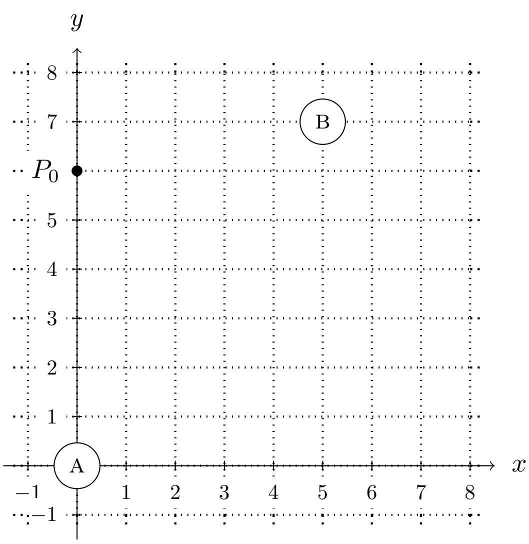
(**c**) (2 punten) Beschouw de driehoek $A_0B_0C_0$. We kiezen drie collineaire punten S, T, U zodat we kunnen schrijven $\lambda_1 = \{A_0B_0, S\}$, $\lambda_2 = \{B_0C_0, T\}$, $\lambda_3 = \{C_0A_0, U\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$, zoals hieronder afgebeeld (rechts). Het product $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ is constant. Bepaal de waarde van die constante.





Vraag 5 (4 punten)

Alice (A) en Bob (B) bewegen zich in het coördinatenvlak door tegelijkertijd opeenvolgende stappen met lengte 1 te zetten.
Alice begint op $(0,0)$ en doet telkens met gelijke kansen een willekeurige stap naar rechts of naar boven. Bob begint op $(5,7)$ en doet telkens met gelijke kansen een willekeurige stap naar links of naar beneden.



(**a**) (1 punt) Wat is de kans dat Alice en Bob elkaar ontmoeten in het punt $P_0(0,6)$?

(**b**) (1 punt) Bepaal de andere punten $(P_1, P_2, \ldots)$ waar het mogelijk is dat Alice en Bob elkaar kunnen ontmoeten.

(**c**) (2 punten) Wat is de kans dat Alice en Bob elkaar zullen ontmoeten?

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Analyse

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 1, Vraag 1

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- Analyse
  - Rijen
- Trigonometrie
- Meetkunde

Deel 2 van het examen

- Algebra
- Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag & oplossing

De elementen van de rij (u_n) voldoen aan

$$u_0 = \frac{1}{3} \qquad \text{en} \qquad 3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) (1 punt) Toon aan dat de rij $(u_n + \frac{1}{3})$ een meetkundige rij is met reden gelijk aan 2.

Bepaal $u_{n+1} + \frac{1}{3}$ in functie van $u_n + \frac{1}{3}$.

Voor $n = 0, 1, 2, \ldots$, we maken gebruik van de gegeven recurrentie vergelijking:
$3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} + \frac{1}{3} = 2\left(u_n + \frac{1}{3}\right).$

(b) (2 punten) Bepaal een expliciet voorschrift van u_n in functie van n.

Bepaal eerst een expliciet voorschrift voor $u_n + \frac{1}{3}$ in functie van n aan de hand van (a).

$$u_{n+1} + \frac{1}{3} = 2\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = 2^2\left(u_{n-1} + \frac{1}{3}\right) = \ldots = 2^{n+1}\left(u_0 + \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_n + \frac{1}{3} = 2^n\left(u_0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2^{n+1}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad u_n = \tfrac{1}{3}(2^{n+1} - 1).$$

(c) (2 punten) Bereken $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Maak gebruik van (a) en los dit op aan de hand van de formule voor de som van de termen van een meetkundige rij.

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 + \ldots + u_n &= \left(u_0 + \frac{1}{3}\right) + \left(u_1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{1}{3}\right) - (n+1)\frac{1}{3} \\
&= \frac{\left(u_0 + \frac{1}{3}\right) - \left(u_n + \frac{1}{3}\right) \cdot 2}{1 - 2} - (n+1)\frac{1}{3} \\
&= 2 \cdot \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3} - (n+1)\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(2^{n+2} - n - 3\right).
\end{aligned}$$

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Analyse

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 1, Vraag 2

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- Analyse
  - Afgeleiden
  - Integralen
- Trigonometrie
- Meetkunde

Deel 2 van het examen

- Algebra
- Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag & oplossing

De functies cosh en sinh zijn gegeven door

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{en} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Merk op dat $\cosh' = \sinh$ en $\sinh' = \cosh$, waarbij het accent $(\,'\,)$ de afgeleide aanduidt.

(a) (1 punt) Bereken de afgeleide van $\cosh(\sinh(\cosh(x)))$ in $x = 0$.

Eerste stap: $\big(\cosh \circ \sinh \circ \cosh\big)'(x) = \big(\cosh' \circ \sinh \circ \cosh\big)(x) \cdot \big(\sinh \circ \cosh\big)'(x)$.

$$\big(\cosh \circ \sinh \circ \cosh\big)'(x) = \big(\cosh' \circ \sinh \circ \cosh\big)(x) \cdot \big(\sinh' \circ \cosh\big)(x) \cdot \cosh'(x).$$

$$\sinh(0) = \tfrac{e^0 - e^0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(\cosh \circ \sinh \circ \cosh\big)'(0) = \sinh(\sinh(\cosh(0)))\cosh(\cosh(0))\sinh(0) = 0.$$

(b) (1 punt) Bewijs dat $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \tfrac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \tfrac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \tfrac{1}{4}(2+2) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) (1 punt) Bewijs dat $2\sinh^2(x) = \cosh(2x) - 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

$$2\sinh^2(x) = 2 \cdot \tfrac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right) = \cosh(2x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(d) (2 punten) Bewijs dat

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{const.},$$

via substitutie $x = \cosh\theta$ waarbij $x \geq 1,\ \theta \geq 0$. Je kan hiervoor de deelvragen (b) en (c) gebruiken.

Bewijs eerst dat $\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\frac{\sinh 2\theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{const.}$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1} dx &= \int \sqrt{\cosh^2\theta - 1} \sinh\theta \, d\theta \qquad \text{waarbij} \qquad x = \cosh\theta \geq 1,\ \theta \geq 0 \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \int \sinh^2\theta d\theta \\
&\overset{\text{(c)}}{=} \frac{1}{2}\int (\cosh 2\theta - 1) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sinh 2\theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{const.} \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{x\sqrt{x^2-1}}_{\text{(i)}} - \frac{1}{2}\underbrace{\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}_{\text{(ii)}} + \text{const.}
\end{aligned}$$

Voor (i):

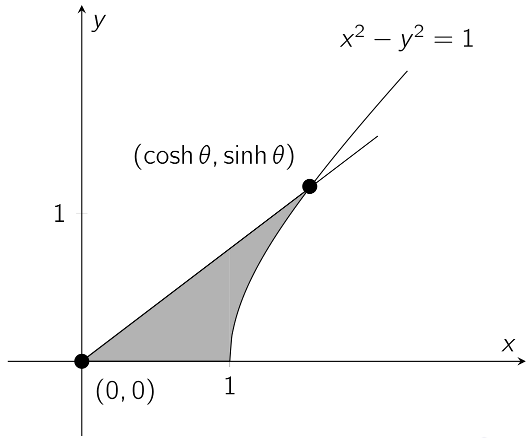
$$\frac{\sinh 2\theta}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^{2\theta} - e^{-2\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right) = \cosh\theta\sinh\theta = x\sqrt{x^2-1}.$$

Voor (ii):

$$x = \cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \iff e^{2\theta} - 2xe^{\theta} + 1 = 0 \iff e^{\theta} = x \pm \sqrt{x^2-1}.$$

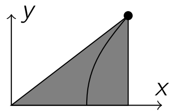
Gezien $\theta \geq 0$, er volgt $\theta = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

(e) (2 punten) Bewijs dat de oppervlakte van het gekleurde gebied hiernaast $\dfrac{\theta}{2}$ is, waarbij θ een positief reëel getal is.

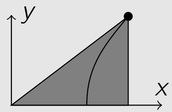


Dit gebied wordt begrensd door de x-as, de kromme $x^2 - y^2 = 1$ en de rechte die door de oorsprong en het punt $(\cosh\theta, \sinh\theta)$ gaat.

Eerste stap:

Gekleurd Opp. $=$ Opp.() $- \int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\,dx$

en maak gebruik van (d).

Gekleurd Opp. $=$ Opp.() $- \int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\,dx$

(d) $\Rightarrow \quad \int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cosh\ominus\sinh\ominus - \frac{\ominus}{2}\right]_0^{\theta} = \frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \frac{\theta}{2}.$

$$= \frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \left(\frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \frac{\theta}{2}.$$

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Trigonometrie

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 1, Vraag 3

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- Analyse
- Trigonometrie
  - Vergelijkingen
- Meetkunde

Deel 2 van het examen

- Algebra
- Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag & oplossing

Los op in $\mathbb{R}$:

$$\left(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x + \cos 11x\right) \cdot \sin x = -\frac{1}{4}.$$

Eerste stap:

$$\left(\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 11x\right) \cdot \sin x = \cos x \sin x + \cos 3x \sin x + \ldots + \cos 11x \sin x.$$

Tweede stap: Formules van Simpson.

Gezien dat $2\cos A \cdot \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$, bekomen we:

$$\begin{aligned} 2\ \cos x\ \sin x &= \sin 2x - \sin 0 \\ 2\ \cos 3x\ \sin x &= \sin 4x - \sin 2x \\ 2\ \cos 5x\ \sin x &= \sin 6x - \sin 4x \\ &\vdots \\ 2\ \cos 11x\ \sin x &= \sin 12x - \sin 10x \end{aligned}$$

Daaruit volgt dat

$$\left(\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 11x\right) \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 12x.$$

De vergelijking wordt

$$\sin 12x = -\frac{1}{2}.$$

De oplossingen zijn

$$12x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{of} \quad 12x = \frac{7\pi}{6} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z},$$

dat wil zeggen

$$x = -\frac{\pi}{72} + k\frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{of} \quad x = \frac{7\pi}{72} + k'\frac{\pi}{6},\ k' \in \mathbb{Z}.$$

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Meetkunde

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 1, Vraag 4

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

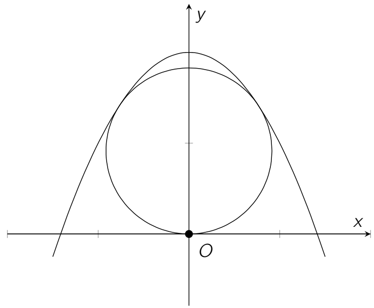
- Analyse
  - Afgeleide
- Trigonometrie
- Meetkunde
  - Redeneren en constructie

Deel 2 van het examen

- Algebra
- Analytische Meetkunde
  - Cirkel en parabool
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag & oplossing

Bepaal in een assenstelsel Oxy de straal van de grootst mogelijke cirkel boven de x-as en onder de parabool met vergelijking $y = -x^2 + 2$, zoals hiernaast afgebeeld.



- Aan de snijpunten tussen de cirkel en de parabool, hebben de cirkel en de parabool dezelfde raaklijn.
- De vergelijking van de cirkel is $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, waarbij R de straal is.

Vergelijking van de cirkel:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} + R.$$

Snijpunten van de cirkel en de parabool:

$$(x, y) = (\pm a, b).$$

In $x = a$ volgens de parabool en de cirkel hebben we

$$\begin{aligned} &\text{zelfde } y\text{-waarde} \quad (\text{vergelijking } 1): && -a^2 + 2 = \sqrt{R^2 - a^2} + R \\ &\text{zelfde afgeleide} \quad (\text{vergelijking } 2): && -2a = \frac{1}{2}\frac{-2a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned} R^2 - a^2 &= \frac{1}{4} && (\text{vergelijking 2 na vereenvoudiging}) \\ R + a^2 &= \frac{3}{2} && (\text{vergelijking 2 in vergelijking 1}) \end{aligned}$$

We willen R bepalen. We tellen de vergelijkingen lid per lid op:

$$R^2 + R - \frac{7}{4} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad R_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{8}}{2}.$$

De straal is $R = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}$.

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Algebra

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 2, Vraag 1

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- Analyse
- Trigonometrie
- Meetkunde

Deel 2 van het examen

- Algebra
  - Veeltermen
- Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag & oplossing

Vind een veelterm $p(x)$ zo dat $p(x)-p'(x)=x^9$. Bepaal eerst de graad van $p(x)$. Druk de coëfficiënten uit met faculteiten.

- Taan aan dat $p(x)$ de volgende vorm heeft:

$$p(x)=a_9x^9+a_8x^8+a_7x^7+\ldots+a_1x+a_0.$$

- Maak vervolgens gebruik van de vergelijking $p(x)-p'(x)=x^9$.

We bepalen eerst de graad van de veelterm:

$$p(x)-p'(x)=x^9 \quad \Rightarrow \quad \deg\,(p(x))=9.$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_9x^9+a_8x^8+a_7x^7+\ldots+a_1x+a_0 \\ p'(x) &= 9a_9x^8+8a_8x^7+7a_7x^6+\ldots+a_1 \end{aligned}$$

waarbij $a_0, a_1, \ldots, a_9$ te bepalen coëfficiënten zijn. De vergelijking in de opgave wordt dan gebruikt:

$$p(x) - p'(x) = x^9 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_9 & = 1 \\ a_8 - 9a_9 & = 0 \\ a_7 - 8a_8 & = 0 \\ \quad\vdots & \\ a_1 - 2a_2 & = 0 \\ a_0 - a_1 & = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_9 & = 1 & = 9!/9! \\ a_8 & = 9 & = 9!/8! \\ a_7 & = 9 \cdot 8 & = 9!/7! \\ \quad\vdots & & \\ a_1 & = 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 & = 9!/1! \\ a_0 & = 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 & = 9!/0! \end{cases}$$

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Algebra

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 2, Vraag 2

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- Analyse
- Trigonometrie
- Meetkunde

Deel 2 van het examen

- Algebra
  - Complexe getallen
- Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek
  - Waarschijnlijkheid van een gebeurtenis, combinatoriek

Vraag & oplossing

Twee verschillende oplossingen z_1 en z_2 van de volgende vergelijking in $\mathbb{C}$ worden willekeurig gekozen:

$$z^{12} - 1 = 0.$$

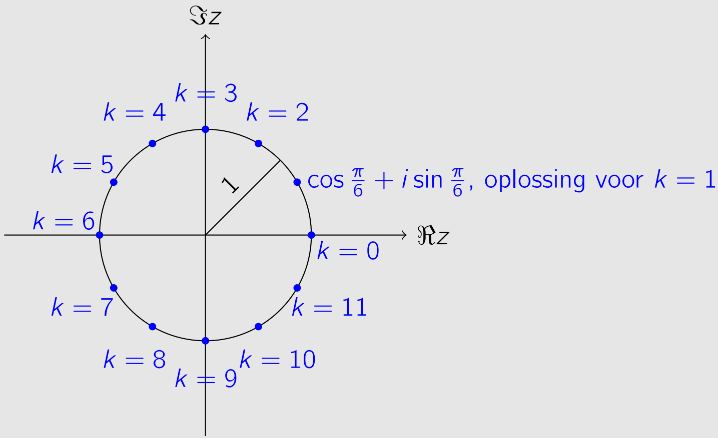
(a) (2 punten) Begin met alle oplossingen van deze vergelijking in hun vorm $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ te geven. Stel deze oplossingen voor in het complexe vlak.

- Notatie: $\rho \operatorname{cis}(\theta) = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}$.
- $1 = \operatorname{cis}(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- De Moivre:
$$(\rho \operatorname{cis}(\theta))^{12} = \rho^{12} \operatorname{cis}(12\,\theta).$$

De 12 oplossingen hebben een modulus gelijk aan 1, en worden gegeven door:

$$\operatorname{cis}\left(k\frac{\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 11.$$

Elke oplossing komt overeen met één punt op de cirkel met straal 1 in het complexe vlak.

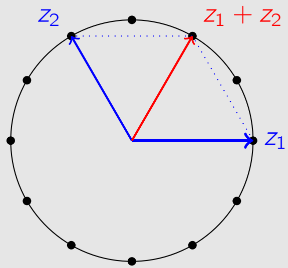


(b) (2 punten) Bepaal de waarschijnlijkheid dat $|z_1 + z_2| = 1$.

Bepaal de hoek gevormd door de twee vectoren die de oorsprong met z_1 en z_2 verbinden.

Voorwaarde: hoek van 120 graden (zoals getoond op de tekening). Inderdaad, in dit geval ziet men dat

$$|z_1 + z_2| = |z_1| \cos 60^\circ + |z_2| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$



We rekenen nu $\Pr\{|z_1 + z_2| = 1\}$.

- Mogelijke gevallen (aantal paren van oplossingen): $\binom{12}{2}$.
- Gunstige gevallen (aantal paren met een hoek van 120 graden): $\frac{12\times 2}{2}$.

De gevraagde waarschijnlijkheid is

$$\Pr\{|z_1 + z_2| = 1\} = \frac{\frac{12\times 2}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{2}{11}.$$

Interpretatie: voor een willekeurig gekozen wortel z_1 zijn er 2 gunstige gevallen en 11 mogelijke gevallen voor de keuze van z_2.

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Waarschijnlijkheidsrekenen

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 2, Vraag 3

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- Analyse
- Trigonometrie
- Meetkunde

Deel 2 van het examen

- Algebra
- Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek
  - Combinatoriek

Vraag & oplossing

Een gehele positieve oplossing van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r, \quad n \geq 1, \quad r \geq 0,$$

met onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wordt geschreven als $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ waarbij $e_1, e_2, \ldots, e_n$ geordende gehele getallen zijn zodat $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = r$ en $e_i \geq 0$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$. Op analoge wijze definiëren we het begrip positieve gehele oplossing voor een ongelijkheid van de vorm

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq r.$$

Bijvoorbeeld, $(0, 2)$, $(2, 0)$ en $(1, 1)$ zijn drie verschillende positieve gehele oplossingen van de vergelijking $x_1 + x_2 = 2$, maar $(-1, 3)$ en $(1/2, 3/2)$ zijn dat niet.

(a) (2 punten) Bepaal het aantal positieve gehele oplossingen van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9.$$

- Wat zijn de mogelijke waarden voor x_1? Begin eerst met het geval dat $z_1 = 9$, want dan is er maar één mogelijke oplossing: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9, 0, 0, 0)$.
- Eens x_1 vast is, bepaal de mogelijke waarden voor x_2 (en zo verder voor x_3 en x_4).

In de tabel, de kolom # Opl. stelt het aantal oplossigen voor.

			# Opl.
$x_1 = 9$	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 0$	1
$x_1 = 8$	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 1$	2
$x_1 = 7$	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 2$	3
$x_1 = 6$	$x_2 = 3$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 2$	3
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 3$	4
$x_1 = 5$	$x_2 = 4$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 3$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 2$	3
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 3$	4
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 4$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Andere rijen in de tabel:
We zien dat als $x_1 = a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ en $x_2 = b \in \{0, \ldots, 9-a\}$, dan is het aantal oplossingen van de vergelijking $x_3 + x_4 = 9 - a - b$ gegeven door $9 - a - b + 1 = 10 - a - b$. De mogelijke waarden voor x_3 zijn immers alle natuurlijke getallen van 0 tot $9 - a - b$, en voor elke waarde van x_3 is er slechts één mogelijke waarde voor x_4.

Om het totaal aantal oplossingen te vinden, tellen we alle waarden in de laatste kolom van de tabel bij elkaar op:

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + \ldots + (1+2+\ldots+10) = 220.$$

(b) (1 punt) Leid hieruit het aantal positieve gehele oplossingen van de ongelijkheid $x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$ af.

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N})$

Zoals voor **(a)**, 220 oplossingen.

(c) (1 punt) Op hoeveel verschillende manieren kunnen 9 munten van 1 euro worden verdeeld onder Amber, Billie, Candice en Djamel? Het is niet verplicht dat iedereen ten minste één euro ontvangt.

Amber: x_A euros, Billie: x_B euros, Candice: x_C euros, Djamel: x_D euros.
We moeten het aantal positieve gehele oplossingen van de volgende vergelijking tellen:

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 9.$$

(a) $\Rightarrow$ 220 verschillende manieren.

(d) (2 punten) Bepaal het aantal verschillende rijen dat kan worden gemaakt met de volgende 12 symbolen:

$$\{\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star, \star, \star\}.$$

Elk symbool wordt exact één keer gebruikt. Bijvoorbeeld,

$$(\bullet, \bullet, \star, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star) \qquad \text{en} \qquad (\star, \bullet, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \star, \bullet, \bullet, \bullet)$$

zijn twee verschillende rijen. De $\bullet$ symbolen zijn onderling niet te onderscheiden, en de $\star$ symbolen onderling ook niet.

Drie posities kiezen voor de $\star$ uit de 12 opties:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220.$$

Opmerking over het verband met **(a)**:

De positie van de drie symbolen $\star$ laat ons toe de symbolen $\bullet$ in 4 groepen te verdelen, die elk overeenkomen met één oplossing van de vergelijking in **(a)**. Bijvoorbeeld,

$$(\underbrace{\bullet,\bullet}_{x_1=2},\star,\underbrace{\bullet}_{x_2=1},\star,\underbrace{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet}_{x_3=6},\star\underbrace{\quad}_{x_4=0}).$$

Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit
Koninklijke Militaire School

Analytische Meetkunde

Bijkomende proef POL - 2022. Oplossing van Deel 2, Vraag 4

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

Deel 1 van het examen

- Analyse
- Trigonometrie
- Meetkunde

Deel 2 van het examen

- Algebra
- Analytische Meetkunde
    - Vergelijkingen van rechten en vlakken in de ruimte
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag & oplossing

De cartesische vergelijkingen van drie rechten d_1, d_2, d_3 in de ruimte zijn gegeven:

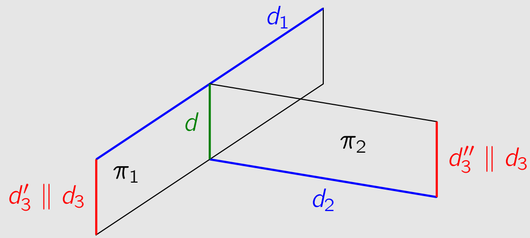
$$d_1 \equiv \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} , \qquad d_2 \equiv \begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases} , \qquad d_3 \equiv \begin{cases} z = y \\ x = -2 \end{cases} .$$

Bepaal de cartesische vergelijkingen van de rechte die d_1 en d_2 snijdt, en die evenwijdig met d_3 is. Maak eerst een schets.

- Bepaal een vlak π_1 dat d_1 bevat en evenwijdig is met d_3.
- Bepaal een vlak π_2 dat d_2 bevat en evenwijdig is met d_3.
- De gezochte rechte wordt gegeven door de doorsnede van de twee vlakken.

We hebben de richtingvectoren van de drie rechten nodig.

$$d_1 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_3 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$



$$d = \pi_1 \cap \pi_2, \quad \pi_1 \perp \vec{n}_1, \quad \pi_2 \perp \vec{n}_2.$$

We willen $\vec{n}_1 = (a, b, c)$ en $\vec{n}_2 = (a', b', c')$ bepalen.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a,b,c) \circ (1,0,1) & = 0 \\ (a,b,c) \circ (0,1,1) & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} a + c & = 0 \\ b + c & = 0 \end{array} \right. \iff \vec{n}_1 \parallel (1,1,-1).$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a',b',c') \circ (1,1,0) & = 0 \\ (a',b',c') \circ (0,1,1) & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} a' + b' & = 0 \\ b' + c' & = 0 \end{array} \right. \iff \vec{n}_2 \parallel (1,-1,1).$$

De twee vlakken hebben als vergelijking

$$\pi_1 \equiv x + y - z = e, \qquad \pi_2 \equiv x - y + z = e'.$$

Door te merken dat $(0,0,0) \in \pi_1$ en $(0,0,1) \in \pi_2$, zijn de vergelijkingen van de twee vlakken volledig bepaald $(e = 0,\ e' = 1)$.

We hebben gevonden dat

$$d \equiv \begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x - y + z & = 1 \end{cases} .$$

Koninklijke Militaire School - Bijkomende proef POL

2023 Analyse - Goniometrie - Meetkunde **Reeks C Deel 1**

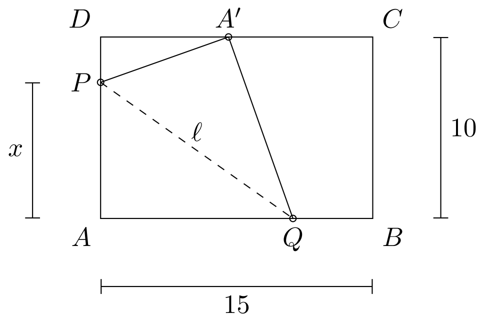
4 vragen - 3 uur

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	5	5	5	5	20

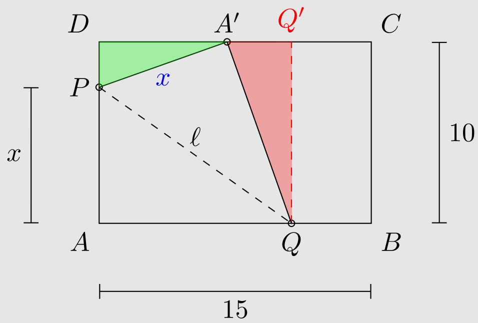
Vraag 1 .... 5 punten

We vouwen een rechthoekig vel papier $ABCD$ met afmetingen 10×15 door het hoekpunt A naar een punt A' te brengen dat zich op de lange zijde $[CD]$ bevindt. We duiden de lengte van het lijnstuk $[AP]$ aan met x, en de lengte van de vouw $[PQ]$ (gestippeld op de figuur) met ℓ.



(a) (4 punten) Toon aan dat $\ell^2 = \dfrac{x^3}{x-5}$.

Vul het diagram aan:



Aan de hand van Pythagoras:

$$\ell^2 = x^2 + |A'Q|^2.$$

De twee gekleurde driehoeken zijn gelijkvormig. Dit laat toe om $|A'Q|$ te vinden als functie van x:

$$\frac{|A'Q|}{x} = \frac{10}{|DA'|} \qquad \text{waarbij} \quad |DA'| = \sqrt{x^2 - (10-x)^2} \quad \text{in de gekleurde driehoek } A'DP.$$

We vinden dat

$$|A'Q| = \frac{10x}{\sqrt{x^2 - (10-x)^2}} = \frac{10x}{\sqrt{20x - 100}}.$$

Voeg deze uitdrukking in in de uitdrukking voor ℓ^2:

$$\ell^2 = x^2 + \frac{100x^2}{20x-100} = x^2 + \frac{5x^2}{x-5} = \frac{x^3}{x-5}.$$

(b) (1 punt) Bepaal de kleinste mogelijke waarde voor ℓ.

Leid de uitdrukking voor ℓ^2 af als functie van x. We vinden:

$$\frac{3x^2(x-5)-x^3}{(x-5)^2} = \frac{x^2(2x-15)}{(x-5)^2}.$$

Deze uitdrukking is nul voor $x = \frac{15}{2}$ en de overeenkomstige waarde van ℓ is $\ell_{\text{min}} = \frac{15}{2}\sqrt{3}$.

Opmerking. We hebben een optimalisatieprobleem op een interval van de vorm $[x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]$. We vergelijken de gevonden waarde ℓ_{min} met de waarden van ℓ aan de uiteinden van het interval.

- De maximale waarde voor x is $x_{\text{max}} = 10$.
- De minimale waarde voor x komt overeen met $|A'Q| = 15$, dat wil zeggen

  $$15 = \frac{10x}{\sqrt{20x-100}}.$$

  Deze vergelijking kan worden herschreven als een tweedegraadsvergelijking:

  $$x^2 - 45x + 225.$$

  De oplossingen zijn

  $$\frac{1}{2}(45 \pm 5\sqrt{45}) = \frac{1}{2}(45 \pm 15\sqrt{5}) = \frac{15}{2}(3 \pm \sqrt{5}).$$

  De minimale waarde voor x is $x_{\text{min}} = \frac{15}{2}(3-\sqrt{5})$. Merk op dat deze waarde groter is dan 5, dus de uitdrukking voor ℓ^2 is positief. (De andere wortel is groter dan 15 en moet worden verworpen.)
- We kunnen dan controleren dat de berekende waarde ℓ_{min} effectief lager is dan de waarden die ℓ aanneemt in x_{min} en x_{max}.

Vraag 2 .... **5 punten**

Voor alle $x > 0$ wordt de functie f gegeven door:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln u}{u+1} du.$$

(a) (3 punten) Toon aan dat $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln^2(x)$.

We gebruiken een verandering van variabelen $t = 1/u$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{1/x} \frac{\ln u}{u+1} du = \int_1^x \frac{\ln(1/t)}{1/t+1}\left(\frac{-dt}{t^2}\right) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2+t} dt.$$

Vandaar

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{u\ln u + \ln u}{u^2+u} du = \int_1^x \frac{\ln u}{u} du = \int_0^{\ln x} v dv = \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{\ln x}$$

via de substitutie $v = \ln u$.
We bekomen

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(\ln x)^2}{2}.$$

(b) (2 punten) Bereken $f(e^{-5}) + f(e^{-4}) + f(e^{-3}) + \ldots + f(e^4) + f(e^5)$.

Groepeer de termen 2 bij 2:

$$\begin{aligned}
f(e^{-5}) + f(e^5) &= \frac{1}{2}\ln^2(e^5) = \frac{1}{2}25\\
f(e^{-4}) + f(e^4) &= \frac{1}{2}\ln^2(e^4) = \frac{1}{2}16\\
f(e^{-3}) + f(e^3) &= \frac{1}{2}\ln^2(e^3) = \frac{1}{2}9\\
f(e^{-2}) + f(e^2) &= \frac{1}{2}\ln^2(e^2) = \frac{1}{2}4\\
f(e^{-1}) + f(e^1) &= \frac{1}{2}\ln^2(e^1) = \frac{1}{2}1\\
f(e^0) &= 0.
\end{aligned}$$

De som bedraagt $\frac{1}{2}(1 + 4 + \ldots + 25) = \frac{55}{2}$.

Vraag 3 . . . . **5 punten**

Los op in $[0, \pi]$:

$$\frac{\cos(3x)}{2\cos(x) - 1} > \frac{\cos(4x)}{2\cos(2x) + 1}.$$

We gaan dezelfde noemer gebruiken. Kijk naar de noemer van de tweede breuk.

$$2\cos(2x) + 1 = 2(2\cos^2(x) - 1) + 1 = 4\cos^2(x) - 1.$$

Het probleem wordt:

$$\frac{\cos(3x)(2\cos(x) + 1) - \cos(4x)}{(2\cos(x) - 1)(2\cos(x) + 1)} > 0.$$

Beschouw de teller:

$$\begin{aligned}
\cos 3x\,(2\cos x + 1) - \cos 4x &= 2\cos 3x \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x\\
&= \cos 2x + \cos 4x + \cos 3x - \cos 4x \qquad \text{(inverse formule van Simpson)}\\
&= \cos 2x + \cos 3x\\
&= 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} \qquad \text{(formule van Simpson).}
\end{aligned}$$

We kunnen een tekentabel opstellen:

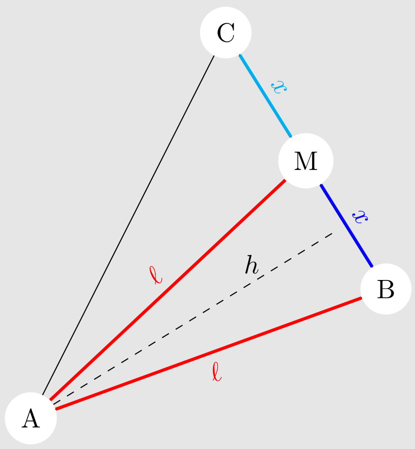
	0		$\frac{\pi}{5}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{5}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\cos 5/2x$	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0
$\cos x/2$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
$2\cos x + 1$	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-	-
$2\cos x - 1$	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-
breuk	+	+	0	-	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	+	0

De oplossing is de verzameling $]0, \pi/5[\,\cup\,]\pi/3, 3\pi/5[\,\cup\,]2\pi/3, \pi[$.

Vraag 4 . . . . **5 punten**

Het punt M is het midden van zijde $[BC]$ van de driehoek ABC waarbij geldt dat $|AB| = |AM|$.

(a) (2 punten) Bewijs dat $\tan\hat{B} = 3\tan\hat{C}$.



Relaties in de driehoek:

$$\tan\hat{B} = \frac{h}{x/2}$$
$$\tan\hat{C} = \frac{h}{3x/2}$$

Vandaar $\tan\hat{B} = 3\tan\hat{C}$.

(b) (3 punten) Bewijs dat $\sin\hat{A} = 2\sin\left(\hat{B} - \hat{C}\right)$.

Wet van sinussen in $\triangle AMC$ (eerste vergelijking) en in $\triangle ABC$ (tweede vergelijking):

$$\frac{\sin(\widehat{CAM})}{x} = \frac{\sin\hat{C}}{\ell}$$
$$\frac{\sin\hat{A}}{2x} = \frac{\sin\hat{C}}{\ell}$$

waarbij

$$\widehat{CAM} = \widehat{CAB} - \widehat{MAB} = (\pi - \hat{B} - \hat{C}) - (\pi - 2\hat{B}) = \hat{B} - \hat{C}$$

Daaruit volgt dat $\sin\hat{A} = 2\sin\left(\hat{B} - \hat{C}\right)$.

Koninklijke Militaire School - Bijkomende proef POL

2023 Analyse - Goniometrie - Meetkunde **Reeks C Deel 1**

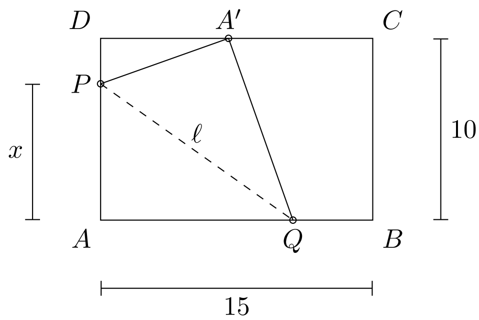
4 vragen - 3 uur

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	5	5	5	5	20

Vraag 1 .... 5 punten

We vouwen een rechthoekig vel papier $ABCD$ met afmetingen 10×15 door het hoekpunt A naar een punt A' te brengen dat zich op de lange zijde $[CD]$ bevindt. We duiden de lengte van het lijnstuk $[AP]$ aan met x, en de lengte van de vouw $[PQ]$ (gestippeld op de figuur) met ℓ.



(a) (4 punten) Toon aan dat $\ell^2 = \dfrac{x^3}{x-5}$.

(b) (1 punt) Bepaal de kleinste mogelijke waarde voor ℓ.

Vraag 2 .... 5 punten

Voor alle $x > 0$ wordt de functie f gegeven door:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln u}{u+1} du.$$

(a) (3 punten) Toon aan dat $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$.

(b) (2 punten) Bereken $f(e^{-5}) + f(e^{-4}) + f(e^{-3}) + \ldots + f(e^4) + f(e^5)$.

Vraag 3 .... 5 punten

Los op in $[0, \pi]$:

$$\frac{\cos(3x)}{2\cos(x) - 1} > \frac{\cos(4x)}{2\cos(2x) + 1}.$$

Vraag 4 .... 5 punten

Het punt M is het midden van zijde $[BC]$ van de driehoek ABC waarbij geldt dat $|AB| = |AM|$.

(a) (2 punten) Bewijs dat $\tan \hat{B} = 3 \tan \hat{C}$.

(b) (3 punten) Bewijs dat $\sin \hat{A} = 2 \sin \left(\hat{B} - \hat{C} \right)$.

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	4	5	6	5	20

Vraag 1 .... **4 punten**

We noemen k het enige reële getal dat voldoet aan de volgende twee voorwaarden:

$$0 < k < 1 \qquad \text{en} \qquad k^3 + k = 1.$$

(a) (1 punt) Schrijf k^4 als een kwadratische uitdrukking, dat wil zeggen een uitdrukking van de vorm ak^2+bk+c, waarbij a, b en c reële coëfficiënten zijn die moeten worden bepaald. Voor deze en de volgende deelvragen kan men telkens aannemen dat de kwadratische uitdrukking uniek is.

We maken gebruik van de tweede voorwaarde $k^3 = 1 - k$:

$$k^4 = kk^3 = k(1-k) = -k^2 + k.$$

(b) (1 punt) Schrijf $\frac{1}{k}$ als een kwadratische uitdrukking.

We delen elk lid van de tweede voorwaarde door k. Dat geeft:

$$\frac{1}{k} = k^2 + 1$$

wat een kwadratische uitdrukking is.

(c) (1 punt) Toon aan dat $\frac{1}{1+k}$ gelijk is aan de kwadratische uitdrukking $\frac{1}{3}(k^2 - k + 2)$.

Als

$$\frac{1}{1+k} = ak^2 + bk + c$$

dan

$$1 = ak^3 + (a+b)k^2 + (b+c)k + k$$

en met behulp van de voorwaarde $k^3 = 1 - k$ vinden we

$$1 = (a+b)k^2 + (-a+b+c)k + (c+a).$$

Omdat de kwadratische uitdrukking uniek is, kunnen de coëfficiënten geïdentificeerd worden, wat leidt tot een stelsel van drie vergelijkingen:

$$\begin{array}{ll} (k^0) & 1 = c + a \\ (k^1) & 0 = -a + b + c \\ (k^2) & 0 = a + b \end{array}$$

waarvan de unieke oplossing gegeven wordt door $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$.

(d) (1 punt) Schrijf het oneindige product

$$(1-k)(1+k^2)(1+k^4)(1+k^8)(1+k^{16})\ldots$$

als een kwadratische uitdrukking. Hint: $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots = \frac{1}{1-x}$ als $|x|<1$.

Om een idee te krijgen, bereken je het product van de eerste twee factoren:

$$(1-k)(1+k^2) = 1-k+k^2-k^3.$$

Vervolgens wordt het product van de eerste drie factoren berekend:

$$\begin{aligned}(1-k)(1+k^2)(1+k^4) &= (1-k+k^2-k^3)(1+k^4)\\ &= 1-k+k^2-k^3+k^4(1-k+k^2-k^3)\\ &= 1-k+k^2-k^3+k^4-k^5+k^6-k^7.\end{aligned}$$

We merken dat het oneindige product geschreven kan worden als

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-k)^m.$$

Dit is een meetkundige reeks van reden $-k$. Omdat $|-k|<1$, convergeert deze reeks en is de som ervan

$$\frac{1}{1-(-k)} = \frac{1}{1+k}.$$

De kwadratische uitdrukking is gegeven in de vorige deelvraag.

Vraag 2 .... 5 punten

Teken nauwkeurig in het complexe vlak het gebied dat bestaat uit alle punten z zodat

$$\frac{z}{10} \quad \text{en} \quad \frac{10}{\bar{z}}$$

allebei hun reële en imaginaire deel tussen 0 en 1 (inbegrepen) hebben. Hierin stelt $\bar{z}$ de complex toegevoegde van z voor.

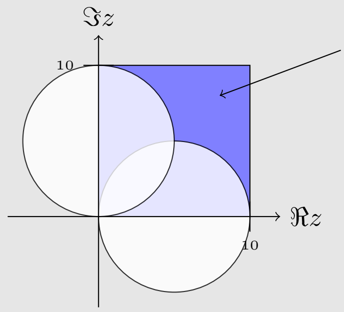
Stel $z = a+bi \neq 0$. Dan $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{z}{\bar{z}z} = \dfrac{z}{|z|^2}$.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \Re(z/10) \in [0,1] & \iff a \in [0,10]\\
(2) & \Im(z/10) \in [0,1] & \iff b \in [0,10]\\
(3) & \Re(10/\bar{z}) \in [0,1] & \iff 10\dfrac{a}{a^2+b^2} \in [0,1]\\
(4) & \Im(10/\bar{z}) \in [0,1] & \iff 10\dfrac{b}{a^2+b^2} \in [0,1]
\end{array}$$

We beschouwen (3) en (4).

$$\begin{aligned}(3) \iff & a \geq 0 \quad \text{en} \quad a^2+b^2 \geq 10a \\ \iff & a \geq 0 \quad \text{en} \quad (a-5)^2+b^2 \geq 5^2.\end{aligned}$$

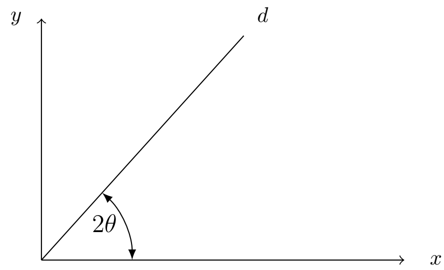
$$\begin{aligned}(4) \iff & b \geq 0 \quad \text{en} \quad a^2+b^2 \geq 10b \\ \iff & b \geq 0 \quad \text{en} \quad a^2+(b-5)^2 \geq 5^2.\end{aligned}$$



Vraag 3 .... **6 punten**

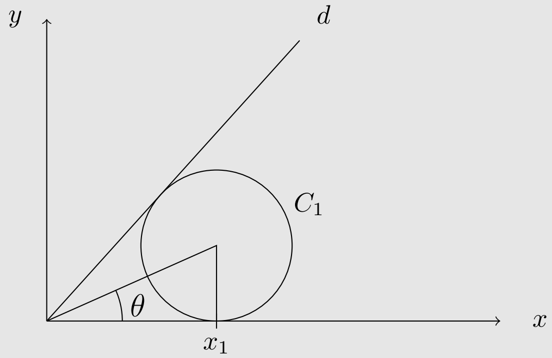
Gegeven: een orthonormaal assenstelsel en een rechte d die een hoek 2θ (tussen 0 en $\pi/2$) maakt met de x-as en door de oorsprong gaat (zoals aangegeven op de figuur).

De cirkel C_1 heeft een straal van 1 en de cirkel C_2 heeft een straal van 3. Beide zijn ingesloten tussen de rechten d en de x-as. De cirkels zijn rakend aan beide rechten.



(a) (2 punten) Geef de cartesische vergelijking van de cirkel C_1 in functie van θ.

Zij x_1 de abscis van het snijpunt tussen C_1 en de x-as, zoals hieronder weergegeven.



Gezien $\tan\theta = \frac{1}{x_1}$, het middelpunt van de cirkel C_1 heeft als coördinaten

$$(x_1, 1) = \left(\frac{1}{\tan\theta}, 1\right).$$

De vergelijking van de cirkel is

$$\left(x - \frac{1}{\tan\theta}\right)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

(b) (2 punten) Bewijs dat de cirkels C_1 en C_2 elkaar raken (op één enkel punt) als $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Zij x_2 de abscis van het snijpunt tussen C_2 en de x-as. Met behulp van Pythagoras op de rechthoekige driehoek hieronder vinden we

$$(x_2-x_1)^2 + (3-1)^2 = (3+1)^2 \iff (x_2-x_1)^2 = 12$$

waaruit blijkt dat $x_2 - x_1 = 2\sqrt{3}$. De driehoeken met hoekpunten

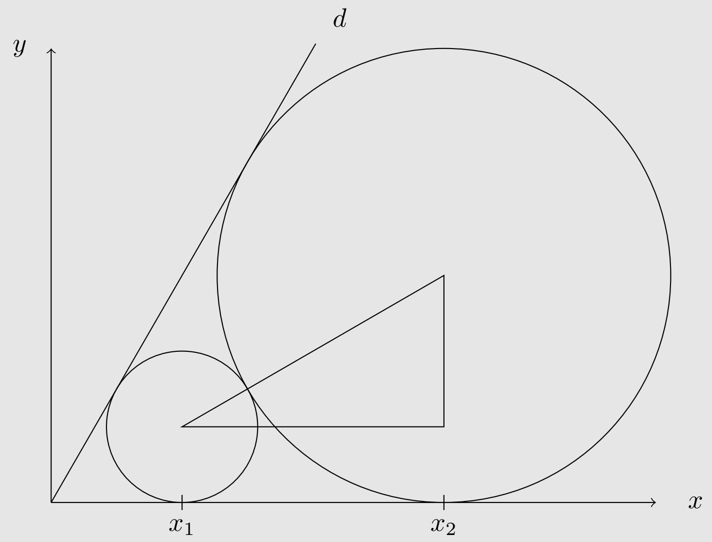
$$(0,0), (x_1,0), (x_1,1) \qquad \text{en} \qquad (0,0), (x_2,0), (x_2,3)$$

zijn gelijkvormig omdat ze dezelfde hoek θ delen en beide een rechte hoek hebben. Door gelijkvormigheid,

$$\frac{3}{1} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Daaruit $x_2 = 3x_1$ en dus $2\sqrt{3} = x_2 - x_1 = 2x_1$. Daarom

$$\tan\theta = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$



(c) (2 punten) Bereken voor deze waarde van θ de oppervlakte van het gebied begrensd door de x-as, C_1 en C_2.

De tussenliggende oppervlakte is de oppervlakte van een trapezium min de oppervlakte van twee cirkelsectoren. De oppervlakte van het trapezium gevormd door de hoekpunten

$$(x_1, 0), (x_2, 0), (x_2, 3), (x_1, 1)$$

wordt gegeven door

$$\frac{3+1}{2}\frac{2}{\tan\theta} = \frac{4}{\tan\theta}.$$

De sector C_1 heeft oppervlakte

$$\frac{1}{2}1^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}.$$

en de sector C_2 heeft oppervlakte

$$\frac{1}{2}3^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{9\pi}{4} - \frac{9\theta}{2}.$$

De tussenliggende oppervlakte is dus

$$\frac{4}{\tan\theta} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) - \left(\frac{9\pi}{4} - \frac{9\theta}{2}\right) = \frac{4}{\tan\theta} - \frac{5\pi}{2} + 4\theta = 4\sqrt{3} - 11\frac{\pi}{6}.$$

Vraag 4 .... **5 punten**

Een leraar verdeelt de volgende 16 leerlingen in 8 groepen van twee leerlingen.

Alice	Candice	Emily	Gauthier
Amaury	Cindy	Emma	Giulia
Billie	Denis	Farah	Heidi
Brieuc	Diane	Felix	Helena

(a) (2 punten) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken ?
Het antwoord mag producten of faculteiten bevatten.

Methode 1 : $15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 (= 2\,027\,025)$

Om elke nieuwe groep te vormen: neem de eerste leerling van de lijst van overgebleven leerlingen, en kies willekeurig een andere leerling van deze lijst.

Methode 2 : $\dfrac{16!}{8!\,2^8} (= 2\,027\,025)$

Alle mogelijke permutaties, en groepeer de eerste twee van de permutatie, dan de volgende twee, enzovoort. Deel door 2^8 om de volgorde binnen de paren te negeren, en deel door 8! omdat de volgorde van de paren er niet toe doet.

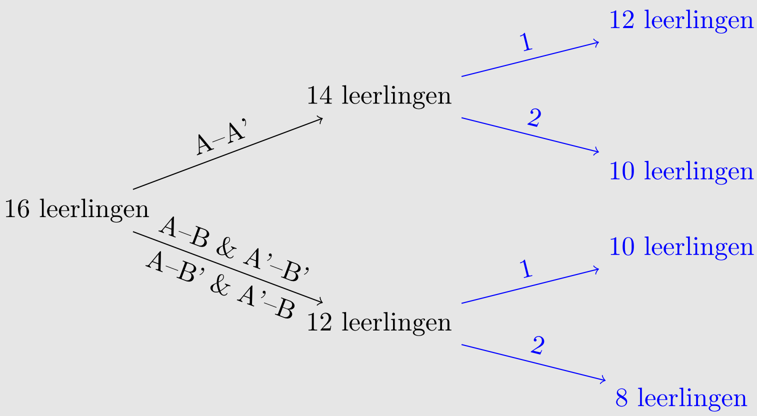
(b) (1 punt) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken als hij wil dat er exact 6 groepen zijn waarvan de namen van beide leerlingen met dezelfde letter beginnen ?

$\binom{8}{6} \times 2 = 14$. Kies 6 letters uit 8 letters (één manier om die 12 leerlingen te groeperen), en twee manieren om de resterende 4 leerlingen te groeperen door identieke beginletters te vermijden.

(c) (2 punten) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken als hij wil dat de namen van de twee leerlingen in de 8 groepen met dezelfde of opeenvolgende letters van het alfabet beginnen?

Hint: de toegelaten groepen voor de eerste twee leerlingen kunnen worden bepaald, en vervolgens kan deze procedure worden herhaald met de resterende leerlingen.

A = Alice, A' = Amaury, B = Brieuc, B' = Billie.



x_n = # verdelingen met een lijst van n resterende leerlingen.

$$\begin{aligned}
x_{16} &= x_{14} + 2x_{12} \\
&= (x_{12} + 2x_{10}) + 2(x_{10} + 2x_8) = x_{12} + 4x_{10} + 4x_8 \\
&= (x_{10} + 2x_8) + 4(x_8 + 2x_6) + 4(x_6 + 2x_4) = x_{10} + 6x_8 + 12x_6 + 8x_4 \\
&= (x_8 + 2x_6) + 6(x_6 + 2x_4) + 12(x_4 + 2x_2) + 8x_4 = x_8 + 8x_6 + 32x_4 + 24x_2 \\
&= (x_6 + 2x_4) + 8(x_4 + 2x_2) + 32x_4 + 24x_2 = x_6 + 42x_4 + 40x_2 \\
&= (x_4 + 2x_2) + 42x_4 + 40x_2 = 43x_4 + 42x_2
\end{aligned}$$

$x_2 = 1$, $x_4 = 3$

$$= 129 + 42 = 171.$$

Koninklijke Militaire School - Bijkomende proef POL

2023 Algebra - Analytische meetkunde - Waarschijnlijkheidsrekenen **Reeks C Deel 2**

4 vragen - 3 uur

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers zijn wel toegestaan.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	4	5	6	5	20

Vraag 1 .... 4 punten

We noemen k het enige reële getal dat voldoet aan de volgende twee voorwaarden:

$$0 < k < 1 \qquad \text{en} \qquad k^3 + k = 1.$$

(a) (1 punt) Schrijf k^4 als een kwadratische uitdrukking, dat wil zeggen een uitdrukking van de vorm ak^2+bk+c, waarbij a, b en c reële coëfficiënten zijn die moeten worden bepaald. Voor deze en de volgende deelvragen kan men telkens aannemen dat de kwadratische uitdrukking uniek is.

(b) (1 punt) Schrijf $\frac{1}{k}$ als een kwadratische uitdrukking.

(c) (1 punt) Toon aan dat $\frac{1}{1+k}$ gelijk is aan de kwadratische uitdrukking $\frac{1}{3}(k^2 - k + 2)$.

(d) (1 punt) Schrijf het oneindige product

$$(1-k)(1+k^2)(1+k^4)(1+k^8)(1+k^{16})\ldots$$

als een kwadratische uitdrukking. Hint: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ als $|x| < 1$.

Vraag 2 .... 5 punten

Teken nauwkeurig in het complexe vlak het gebied dat bestaat uit alle punten z zodat

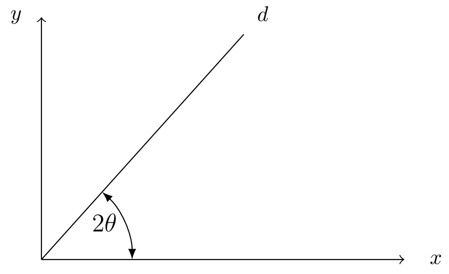
$$\frac{z}{10} \quad \text{en} \quad \frac{10}{\bar{z}}$$

allebei hun reële en imaginaire deel tussen 0 en 1 (inbegrepen) hebben. Hierin stelt $\bar{z}$ de complex toegevoegde van z voor.

Vraag 3 .... 6 punten

Gegeven: een orthonormaal assenstelsel en een rechte d die een hoek 2θ (tussen 0 en $\pi/2$) maakt met de x-as en door de oorsprong gaat (zoals aangegeven op de figuur).

De cirkel C_1 heeft een straal van 1 en de cirkel C_2 heeft een straal van 3. Beide zijn ingesloten tussen de rechten d en de x-as. De cirkels zijn rakend aan beide rechten.



(a) (2 punten) Geef de cartesische vergelijking van de cirkel C_1 in functie van θ.

(b) (2 punten) Bewijs dat de cirkels C_1 en C_2 elkaar raken (op één enkel punt) als $\theta = \frac{\pi}{6}$.

(c) (2 punten) Bereken voor deze waarde van θ de oppervlakte van het gebied begrensd door de x-as, C_1 en C_2.

Vraag 4 .... 5 punten

Een leraar verdeelt de volgende 16 leerlingen in 8 groepen van twee leerlingen.

Alice	Candice	Emily	Gauthier
Amaury	Cindy	Emma	Giulia
Billie	Denis	Farah	Heidi
Brieuc	Diane	Felix	Helena

(a) (2 punten) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken ?
Het antwoord mag producten of faculteiten bevatten.

(b) (1 punt) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken als hij wil dat er exact 6 groepen zijn waarvan de namen van beide leerlingen met dezelfde letter beginnen ?

(c) (2 punten) Op hoeveel manieren kan hij deze verdeling maken als hij wil dat de namen van de twee leerlingen in de 8 groepen met dezelfde of opeenvolgende letters van het alfabet beginnen?
Hint: de toegelaten groepen voor de eerste twee leerlingen kunnen worden bepaald, en vervolgens kan deze procedure worden herhaald met de resterende leerlingen.

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers mogen wel worden gebruikt.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, enz. in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	4	5	4	7	20

Vraag 1 — **4 punten**

(a) (1 punt) Toon aan dat $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

We nemen het kwadraat van het rechterlid:

$$\begin{aligned} 1 - (\sin x - \cos x)^2 &= 1 - (\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x) \\ &= 1 - (1 - 2\sin x \cos x) \\ &= 2\sin x \cos x \\ &= \sin 2x. \end{aligned}$$

(b) (3 punten) Leid hieruit $\int \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}} \right) dx$ af, waarbij een substitutie $u = \sin x - \cos x$ kan worden gebruikt.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}} \right) dx &= \int \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\cos x}\sqrt{\sin x}} \right) dx \\ &= \sqrt{2} \int \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2 \sin x \cos x}} \right) dx \end{aligned}$$

gezien (a)

$$= \sqrt{2} \int \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}} \right) dx$$

$u = \sin x - \cos x$, $du = (\cos x + \sin x)dx$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= \sqrt{2} \arcsin u + \text{const.} \\ &= \sqrt{2} \arcsin(\sin x - \cos x) + \text{const.} \end{aligned}$$

Opmerking: de functie arcsin() is de inverse functie van sin(), m.a.w. de functie $\sin^{-1}()$ of nog bgsin().

Vraag 2 — **5 punten**

Voor deze vraag geven we de formule $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

(a) (3 punten) Merk op dat $\sin \frac{3\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right)$, en toon aan dat $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

$$\begin{aligned}\sin\frac{3\pi}{10} &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}\right)\\ &= \cos\frac{2\pi}{10}\\ &= 1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\end{aligned}$$

We gebruiken de formule gegeven in de opgave, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$:

$$3\sin\frac{\pi}{10} - 4\sin^3\frac{\pi}{10} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{10}$$

We moeten de volgende vergelijking oplossen:

$$4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = 0.$$

We merken op dat $X = 1$ een wortel is. Met Horner factoren we als volgt:

$$(X-1)(4X^2+2X-1) = 0.$$

De nullen van het kwadratische deel zijn $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. We behouden de oplossing met de "+" omdat $\sin\frac{\pi}{10} \in (0,1)$.

(b) (2 punten) Toon aan dat $\sin\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ door gebruik te maken van de waarde van $\sin\frac{\pi}{10}$ gegeven in deelvraag (a).

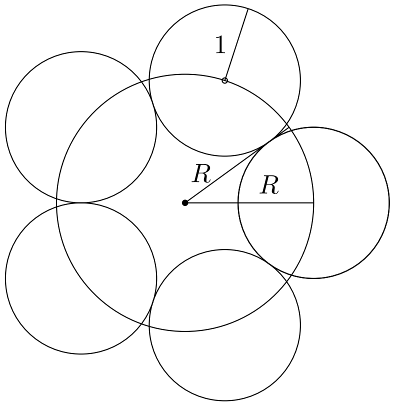
We passen de formule toe $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} &= 2\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}\\ &= 2\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\left(-1+\sqrt{5}\right)^2\left(10+2\sqrt{5}\right)}\\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(10+2\sqrt{5}\right)}\\ &= \frac{1}{8}\sqrt{40-8\sqrt{5}}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

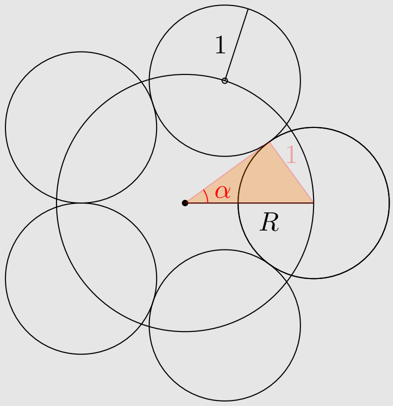
Vraag 3 **4 punten**

De middelpunten van 5 cirkels met straal 1 zijn verdeeld over een cirkel met straal R, zodat de 5 cirkels elkaar twee aan twee raken, zoals getoond in de onderstaande afbeelding. Bereken R, met behulp van de gegevens die zijn opgenomen in de opgave van vraag 2.

Als het eindantwoord een breuk is, dan zal de noemer geen vierkantswortel bevatten.



We construeren een rechthoekige driehoek:



In deze driehoek,

$$R \sin \alpha = R \sin\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{5}\right) = 1.$$

Dus

$$\begin{aligned} R = \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^{-1} &= \frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ &= 4\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10-2\sqrt{5}} \\ &= 4\frac{(10+2\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{100-4\cdot 5} \end{aligned}$$

en na vereenvoudiging

$$= \frac{1}{5}\sqrt{50+10\sqrt{5}} \quad (\approx 1,7013.)$$

Vraag 4 **7 punten**

De functies cosh en sinh zijn gegeven door

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{en} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) (2 punten) We kunnen de uitdrukking

$$13\cosh(x) - 12\sinh(x)$$

schrijven als $a\cosh(x-b)$, voor alle $x \in \mathbb{R}$. Bepaal a en b.

Door de definities van de functies cosh en sinh te gebruiken, moeten we a en b vinden zodat

$$\frac{1}{2}\left(13e^x + 13e^{-x} - 12e^x + 12e^{-x}\right) = a\cosh(x-b)$$

dat wil zeggen

$$\frac{1}{2}\left(e^x + 25e^{-x}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{x-b} + e^{-x+b}\right).$$

Hieruit halen we de vergelijkingen

$$ae^{-b} = 1 \qquad \text{en} \qquad 25 = ae^b.$$

Hieruit volgt $(e^b)^2 = 25$ en $\boxed{b = \ln 5}$, en dus $\boxed{a = 5}$.

Opmerking voor de volgende deelvragen: als u de waarden van a en b niet vindt, kunt u de deelvragen (b) en (c) beantwoorden door te weten dat a en b oplossingen van het volgende stelsel zijn:

$$ae^{-b} = 1 \qquad \text{en} \qquad 25 = ae^b.$$

(b) (2 punten) Los op in $\mathbb{R}$:

$$13\cosh(x) - 12\sinh(x) = 13.$$

Door de vorige subvraag of de definities van de functies cosh en sinh te gebruiken, kan de vergelijking geschreven worden als

$$\frac{1}{2}\left(e^x + 25e^{-x}\right) = 13.$$

We stellen $y = e^x$. De vergelijking wordt

$$y^2 - 26y + 25 = 0 \quad (y \geq 0).$$

De oplossingen zijn $y = e^x = 1$ of $y = e^x = 25$, en dus $\boxed{x = 0}$ of $\boxed{x = \ln 25}$.

(c) (2 punten) Toon aan dat de functie $13\cosh(x) - 12\sinh(x)$ een minimum bereikt voor $x = \ln 5$.

Het is gemakkelijk te controleren dat $\cosh'(x) = 0$ als $x = 0$ en dat het een minimum is. Daarom is de functie minimaal als $x - b = 0$, wat betekent dat $x = \ln 5$.

(d) (1 punt) Geef het minimum van de functie $13\cosh(x) - 12\sinh(x)$.

Het minimum wordt bereikt bij $x = \ln 5$ en het minimum is $5\cosh(0) = 5$.

Koninklijke Militaire School - Bijkomende proef POL

2024 Analyse - Goniometrie - Meetkunde **Reeks A Deel 1**

4 vragen - 3 uur

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers mogen wel worden gebruikt.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, enz. in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	4	5	4	7	20

Vraag 1 **4 punten**

(a) (1 punt) Toon aan dat $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) (3 punten) Leid hieruit $\displaystyle\int \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}} \right) dx$ af, waarbij een substitutie $u = \sin x - \cos x$ kan worden gebruikt.

Vraag 2 **5 punten**

Voor deze vraag geven we de formule $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

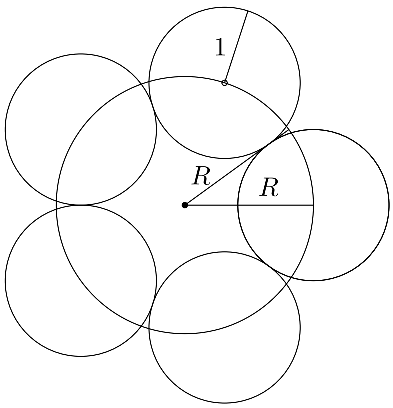
(a) (3 punten) Merk op dat $\sin \frac{3\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right)$, en toon aan dat $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

(b) (2 punten) Toon aan dat $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ door gebruik te maken van de waarde van $\sin \frac{\pi}{10}$ gegeven in deelvraag (a).

Vraag 3 **4 punten**

De middelpunten van 5 cirkels met straal 1 zijn verdeeld over een cirkel met straal R, zodat de 5 cirkels elkaar twee aan twee raken, zoals getoond in de onderstaande afbeelding. Bereken R, met behulp van de gegevens die zijn opgenomen in de opgave van vraag 2.

Als het eindantwoord een breuk is, dan zal de noemer geen vierkantswortel bevatten.



Vraag 4 **7 punten**

De functies cosh en sinh zijn gegeven door

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{en} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) (2 punten) We kunnen de uitdrukking

$$13\cosh(x) - 12\sinh(x)$$

schrijven als $a\cosh(x-b)$, voor alle $x \in \mathbb{R}$. Bepaal a en b.

Opmerking voor de volgende deelvragen: als u de waarden van a en b niet vindt, kunt u de deelvragen (b) en (c) beantwoorden door te weten dat a en b oplossingen van het volgende stelsel zijn:

$$ae^{-b} = 1 \qquad \text{en} \qquad 25 = ae^b.$$

(b) (2 punten) Los op in $\mathbb{R}$:

$$13\cosh(x) - 12\sinh(x) = 13.$$

(c) (2 punten) Toon aan dat de functie $13\cosh(x) - 12\sinh(x)$ een minimum bereikt voor $x = \ln 5$.

(d) (1 punt) Geef het minimum van de functie $13\cosh(x) - 12\sinh(x)$.

2024 **Koninklijke Militaire School - Bijkomende proef POL** **Reeks A Deel 2**

Algebra - Analytische meetkunde - Waarschijnlijkheidsrekenen

4 vragen - 3 uur

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers mogen wel worden gebruikt.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, enz. in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	5	5	5	5	20

Vraag 1 **5 punten**

De rest van de deling van de veelterm $p(x)$ door $(x-2)$ is 5, en de rest van de deling van $p(x)$ door $(x-3)$ is 18. Bepaal de rest van de deling van $p(x)$ door $(x-2)(x-3)$.

Het probleem is als volgt geschreven:

$$\begin{array}{ll} (1) & p(x) = q_1(x)(x-2)+5 \\ (2) & p(x) = q_2(x)(x-3)+18 \\ (3) & p(x) = q_3(x)(x-2)(x-3)+ax+b \end{array}$$

met $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$ polynomen en a, b twee reële getallen die we moeten bepalen. Van daar,

$$\begin{array}{lll} (1),\ (3),\ x=2 & \rightarrow & p(2) = 5 = 2a+b \\ (2),\ (3),\ x=3 & \rightarrow & p(3) = 18 = 3a+b. \end{array}$$

Hieruit volgt dat $a = 13$ en $b = -21$. De rest is $13x - 21$.

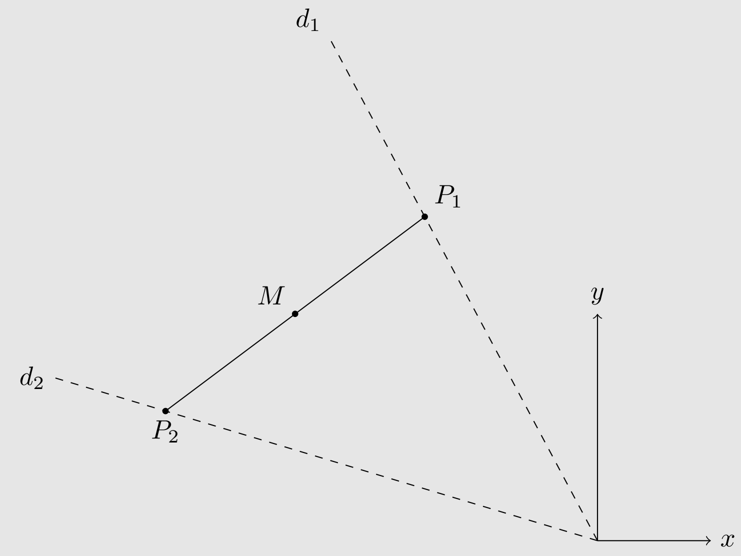
Vraag 2 **5 punten**

De vergelijkingen van twee rechten in het vlak worden gegeven:

$$\begin{array}{ll} d_1: & 15x + 8y = 0 \\ d_2: & 3x + 10y = 0. \end{array}$$

We geven ook het punt $M(-8, 6)$ dat het midden is van het segment $[P_1P_2]$ met P_1 een punt van d_1 en P_2 een punt van d_2.

(a) (1 punt) Maak een schets die d_1, d_2, P_1, P_2 en M weergeeft in een orthonormaal assenstelsel.



(b) (4 punten) Bereken de afstand tussen P_1 en P_2.

De coördinaten van P_1 en P_2 zijn

$$P_1\left(x_1, \frac{-15}{8}x_1\right) \qquad \text{en} \qquad P_2\left(x_2, \frac{-3}{10}x_2\right)$$

met $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ te bepalen. Aangezien M het midden van het lijnsegment $[P_1P_2]$ is, hebben we dat

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{-\frac{15}{8}x_1 - \frac{3}{10}x_2}{2}\right) = (-8, 6).$$

De vergelijking voor de eerste component geeft

$$x_1 = -16 - x_2.$$

We voeren een substitutie uit in de vergelijking voor de tweede component:

$$\begin{aligned}
& 12 = -\frac{15}{8}(-16 - x_2) - \frac{3}{10}x_2 \\
\iff \quad & 12 = 30 + \frac{15}{8}x_2 - \frac{3}{10}x_2 \\
\iff \quad & -18 = \frac{1}{40}(75 - 12)x_2 \\
\iff \quad & -2 \cdot 40 = 7x_2 \\
\iff \quad & -\frac{80}{7} = x_2.
\end{aligned}$$

De afstand tussen P_1 en P_2 is twee keer de afstand tussen P_2 en M:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}(P_1, P_2) &= 2 \cdot \operatorname{dist}(M, P_2) \\
&= 2 \cdot \operatorname{dist}\left((-8, 6), \left(-\frac{80}{7}, \frac{3}{10}\frac{80}{7}\right)\right) \\
&= 2 \cdot \operatorname{dist}\left((-8, 6), \left(-\frac{80}{7}, \frac{24}{7}\right)\right) \\
&= 2 \cdot \left\| \left(\frac{-80+56}{7}, \frac{24-42}{7}\right) \right\| \\
&= 2 \cdot \left\| \left(\frac{-24}{7}, \frac{-18}{7}\right) \right\| \\
&= \frac{2}{7} [576 + 324]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{7} \sqrt{900} \\
&= \frac{60}{7}.
\end{aligned}
$$

Vraag 3 ______ **5 punten**

(a) (2 punten) Toon aan dat voor alle $\theta \in \mathbb{R}$ het complexe getal $z = \cos\theta + i \sin\theta$ voldoet aan

$$z^2 + 1 = 2\cos(\theta) z.$$

Met behulp van De Moivre, voor alle $\theta \in \mathbb{R}$ vinden we

$$
\begin{aligned}
z^2 + 1 &= 1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\
&= 2\cos^2\theta + 2i \sin\theta \cos\theta \\
&= 2\cos\theta\big(\cos\theta + i \sin\theta\big) \\
&= 2\cos\theta\, z.
\end{aligned}
$$

(b) (3 punten) Gebruik deelvraag (a) om, in algebraïsche vorm $a + bi$, alle complexe getallen met modulus 1 te geven die een oplossing zijn van

$$(5z^2 + 5)^5 + (6z)^5 = 0.$$

We herschrijven de vergelijking om $z^2 + 1$ te laten verschijnen:

$$5^5(z^2 + 1)^5 + 6^5 z^5 = 0.$$

Met (a) wordt de vergelijking geschreven

$$5^5(2\cos\theta\ z)^5 + 6^5 z^5 = 0$$

wat resulteert in twee vergelijkingen:

$$z^5 = 0 \qquad \text{of} \qquad 5^5 2^5 \cos^5\theta = -6^5,$$

en op equivalente wijze

$$z = 0 \qquad \text{of} \qquad \cos\theta = -\frac{3}{5}.$$

De oplossing $z = 0$ moet worden uitgesloten omdat we $|z| = 1$ willen. Uit $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ volgt $\sin\theta =$

$\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$. Er zijn twee oplossingen:

$$z = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \qquad \text{of} \qquad z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Vraag 4 ——— **5 punten**

Bereken de waarschijnlijkheid dat een willekeurig gekozen geheel getal tussen 2000 en 20000 (beide getallen niet inbegrepen) *even* is en bestaat uit *allemaal verschillende cijfers*. Bijvoorbeeld, 4052 is zo'n getal, maar niet 10788 (twee keer het cijfer 8) noch 6781 (oneven).

Er zijn $19\,999 - 2000 = 17\,999$ natuurlijke getallen in het open interval $(2000, 20000)$.

We gaan het aantal even getallen tellen die geen herhalende cijfers hebben.

- Getallen > 10000. De decimale representatie is

  $$a_1a_2a_3a_4a_5$$

  met $a_1 = 1$ en a_5 even. Er zijn 5 mogelijkheden voor a_5 (0,2,4,6,8). Er blijven 4 even en 4 oneven cijfers over waaruit a_2, a_3, a_4 gekozen kunnen worden.
  Het totale aantal mogelijkheden is dan

  $$5 \times (8 \times 7 \times 6) = 1680.$$

- Getallen < 10000. De decimale representatie is

  $$a_2a_3a_4a_5$$

  met a_5 even.

  - Geval 1: a_2 is even. Er zijn 4 mogelijkheden voor a_2 (2,4,6,8). Er zijn vier resterende mogelijkheden voor het even cijfer a_5. Er zijn 3 even en 5 oneven cijfers over voor a_3, a_4. Het totale aantal mogelijkheden is
    $$4 \times 4 \times (8 \times 7) = 896.$$
  - Geval 2: a_2 is oneven. Er zijn 4 mogelijkheden voor a_2 (3,5,7,9). Er zijn 5 mogelijkheden voor het even cijfer a_5. Er zijn 4 oneven (inclusief de 1) en 4 even cijfers over om a_3, a_4 te kiezen:

    $$4 \times 5 \times (8 \times 7) = 1120.$$

De kans is $\dfrac{(896 + 1120) + 1680}{17999} = \dfrac{2016 + 1680}{17999} = \dfrac{3696}{17999}$.

2024 | **Koninklijke Militaire School - Bijkomende proef POL** | **Reeks A Deel 2**

Algebra - Analytische meetkunde - Waarschijnlijkheidsrekenen

4 vragen - 3 uur

1. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
2. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers mogen wel worden gebruikt.
3. Laat in uw antwoorden getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, enz. in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	**Totaal**
Punten	5	5	5	5	20

Vraag 1 — **5 punten**

De rest van de deling van de veelterm $p(x)$ door $(x-2)$ is 5, en de rest van de deling van $p(x)$ door $(x-3)$ is 18. Bepaal de rest van de deling van $p(x)$ door $(x-2)(x-3)$.

Vraag 2 — **5 punten**

De vergelijkingen van twee rechten in het vlak worden gegeven:

$$\begin{aligned} d_1: &\quad 15x + 8y = 0 \\ d_2: &\quad 3x + 10y = 0. \end{aligned}$$

We geven ook het punt $M(-8,6)$ dat het midden is van het segment $[P_1P_2]$ met P_1 een punt van d_1 en P_2 een punt van d_2.

(a) (1 punt) Maak een schets die d_1, d_2, P_1, P_2 en M weergeeft in een orthonormaal assenstelsel.

(b) (4 punten) Bereken de afstand tussen P_1 en P_2.

Vraag 3 — **5 punten**

(a) (2 punten) Toon aan dat voor alle $\theta \in \mathbb{R}$ het complexe getal $z = \cos\theta + i\sin\theta$ voldoet aan

$$z^2 + 1 = 2\cos(\theta)z.$$

(b) (3 punten) Gebruik deelvraag (a) om, in algebraïsche vorm $a + bi$, alle complexe getallen met modulus 1 te geven die een oplossing zijn van

$$(5z^2+5)^5 + (6z)^5 = 0.$$

Vraag 4 — **5 punten**

Bereken de waarschijnlijkheid dat een willekeurig gekozen geheel getal tussen 2000 en 20000 (beide getallen niet inbegrepen) *even* is en bestaat uit *allemaal verschillende cijfers*. Bijvoorbeeld, 4052 is zo'n getal, maar niet 10788 (twee keer het cijfer 8) noch 6781 (oneven).