2018

Epreuve POL

Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

Série B

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerre et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \dots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points) On donne le nombre complexe $a = \frac{1}{2}(1+i)$.

(a) (1 point) Calculer le module du nombre complexe $a - 1$.

(b) (1 point) On pose $z_0 = 1, \forall n \in \mathbb{R}_0 : z_n = a^n$ et $u_n = |z_n - z_{n-1}|$. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et en préciser le premier terme u_1 et la raison.

(c) (1 point) Calculer la somme $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

(d) (1 point) Calculer, si elle existe, la limite de s_n lorsque $n \to +\infty$.

Question 2 (4 points) Soient :

$$b : \frac{x-4a-1}{a} = \frac{y-2a-2}{1} = \frac{z}{-a} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$c : \begin{cases} x + y + 2a - 1 = 0 \\ z + a + 3 = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$d : \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \quad (a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\})$$

(a) (1 point) Démontrer $\forall a \in \mathbb{R}_0$: b et c se croisent.

(b) (1 point) Trouver une équation cartésienne du plan α qui inclut b et est parallèle à d.

(c) (1 point) Trouver une équation cartésienne du plan β qui inclut c et est parallèle à d.

(d) (1 point) Démontrer que les surfaces α et β se coupent toujours ($\forall a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$) et que la droite d'intersection passe par un point fixe. Quel est ce point ?

Question 3 (4 points) La courbure d'une fonction est définie comme suit :

$$\left| \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)\right)^{\frac{3}{2}}} \right| \tag{1}$$

(a) (1 point) Calculer la courbure de la fonction $f(x) = \ln x$.

(b) (2 points) Calculer la dérivée de la courbure de f.

(c) (1 point) Pour quelles valeurs de x la courbure de f est-elle maximale ? Si un maximum n'existe pas, calculer les limites de la courbure aux bornes du domaine.

Question 4 (4 points) Soit :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \equiv \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x$$

(a) (1 point) Calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^1\,\mathrm{d}x$

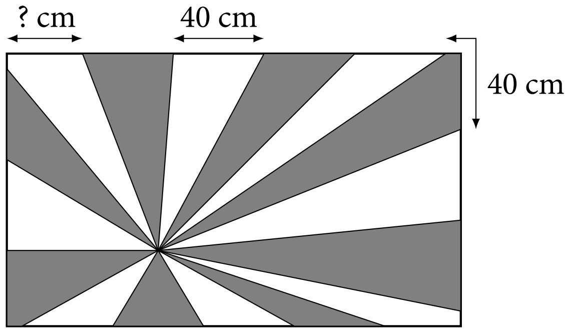
(b) (1 point) Calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2\,\mathrm{d}x$

(c) (2 points) Démontrer par induction complète : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = n!$

Question 5 (4 points) Le drapeau de Fort En Maths est un rectangle de 2 mètres (horizontale) sur 1,2 mètre (verticale). A partir de n'importe quel point strictement intérieur au rectangle, on joint le contour du rectangle tous les 40 centimètres.

On colorie alternativement en blanc et en gris les triangles et les quadrilatères ainsi formés. Le total des aires grises dépasse le total des aires blanches : la différence est exactement le centième de l'aire du rectangle.

En partant du sommet en haut à gauche et en allant à l'horizontale vers la droite, quelle distance parcourt-on jusqu'au premier changement de couleur (du blanc au gris), en centimètres ?



Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerre et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 point) Calculer I_0

(b) (1 point) Calculer I_1

(c) (1 point) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}_0$ on a $(3+2n)\,I_n = 2nI_{n-1}$.

(d) (1 point) Calculer I_5

Question 2 (4 points) Soit : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) (1 point) Calculer la limite de f pour $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$

(b) (2 points) Calculer la dérivée de f et démontrer la relation suivante entre f et f' :

$$f'(x) = f(x)\big(1 - f(x)\big)$$

(c) (1 point) Soit $g(x) = 2f(x) - 1$. Déterminer la relation entre g et g'.

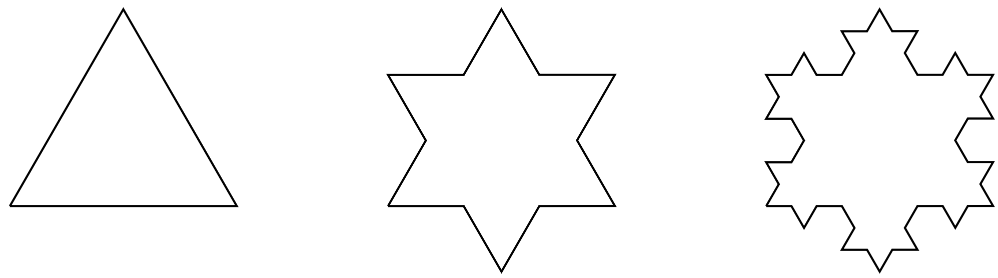
Epreuve POL

2019 | Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes | Série B

5 questions - 4 heures

Question 3 (4 points) Le flocon de neige de Koch peut être construit en commençant par un triangle équilatéral et en ajustant ensuite chaque côté récursivement comme suit :

1. Divisez le segment en trois segments de longueur égale.
2. Dessinez un triangle équilatéral basé sur le segment médian de l'étape 1.
3. Retirez le segment de ligne qui est la base du triangle de l'étape 2.



1er itération 2ème itération

La surface du triangle d'origine est 1.

(a) (1 point) Déterminer la surface du flocon de neige de Koch après 1 itération.

(b) (1 point) Déterminer la surface du flocon de neige de Koch après 2 itérations.

(c) (1 point) Déterminer la surface du flocon de neige de Koch après n itérations.

(d) (1 point) Quelle est la limite de la surface du flocon de neige de Koch après $n \to +\infty$ itérations ?

Question 4 (4 points) Un clavier comporte 42 touches dont 26 représentent les 26 lettres de l'alphabet, les autres représentent des chiffres ou des symboles.

(a) (1 point) Arnaud, qui a 3 ans, frappe au hasard sur une touche du clavier, chaque touche ayant la même probabilité d'être frappée. Quelle est la probabilité qu'il frappe une lettre de son prénom ?

(b) Arnaud frappe successivement 6 touches, distinctes ou non, quelle est la probabilité des événements suivants :

i. (1 point) Arnaud frappe une lettre deux fois et 4 autres lettres différentes ;

ii. (1 point) Arnaud frappe son prénom ;

iii. (1 point) Arnaud frappe son prénom, si l'on sait qu'il a frappé une lettre deux fois et 4 autres lettres différentes.

Question 5 (4 points) Soient : $A(3, 2, 1)$, $B(1, 0, 3)$ et

$$e \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

(a) (1 point) Le lieu géométrique de tous les points C de sorte que le centre du cercle circonscrit au $\triangle ABC$ se situe sur e est un cercle avec centre $(1, 1, 1)$ et rayon $\sqrt{5}$, dans le plan $\alpha \equiv x - 2y - z + 2 = 0$. Démontrer.

(b) (1 point) Déterminer le point S de ce lieu géométrique qui se trouve en $\beta \equiv 2x + y + 2 = 0$.

(c) (1 point) Déterminer l'aire du $\triangle ABS$.

(d) (1 point) Déterminer $\tan \widehat{ASB} = \text{tg}\, \widehat{ASB}$.

Préparation au Concours d'Admission
de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Analyse

Epreuve complémentaire POL - 2020
Solution de la Question 2

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
  - Suites
  - Limites
- Algèbre
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question

Un patient prend 10 mg d'un médicament le premier jour et les jours suivants 5 mg. Au cours de la journée, 40 % de la substance est décomposée dans le corps. On peut représenter les quantités de médicaments qui se trouvent dans l'organisme immédiatement après la prise du 1er, 2ème, 3ème jour, ... par une suite u_1, u_2, u_3, $\ldots$.

(a) (1 point) Donner une formule récursive (par récurrence) pour cette suite.

Solution

(b) (1 point) Prouver par induction complète (par récurrence) que cette suite est limitée vers le haut.

Indication Solution

(c) (1 point) Prouver que la suite est croissante.

Indication Solution

(d) (1 point) Déterminer la limite de la suite à l'aide des règles de calcul des limites.

Solution

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

$$\begin{cases} u_1 &= 10 \\ u_n &= \frac{3}{5}u_{n-1} + 5 \quad \text{pour } n > 1 \end{cases}$$

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

Utiliser le point fixe $u = \frac{25}{2}$ comme borne supérieure.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

Il y a un point fixe $u = \frac{25}{2}$ obtenu comme solution de l'équation

$$u = \frac{3}{5}u + 5.$$

On sait que $u_1 \leq \frac{25}{2}$. Supposons maintenant que $u_{n-1} \leq \frac{25}{2}$, alors pour u_n on a :

$$u_n = \frac{3}{5}u_{n-1} + 5 \leq \frac{3}{5}\frac{25}{2} + 5 = \frac{25}{2}.$$

Cela signifie que $\frac{25}{2}$ est une borne supérieure.

Indication pour la sous-question (c)

Retour à la question

Montrer que $u_n - u_{n-1} \geq 0$.

Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

On montre que $u_{n_1} \leq u_n$ ou de façon équivalente que $u_n - u_{n-1} \geq 0$:

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{2}{5}u_{n-1} + 5 \geq 0.$$

C'est vrai lorsque $u_{n-1} \leq \frac{25}{2}$, ce qui est avéré vu que $\frac{25}{2}$ est une borne supérieure.

Solution de la sous-question (d)

Retour à la question

La suite peut être écrite de façon explicite comme suit :

$$
\begin{aligned}
u_n &= 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + \cdots + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{1} + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{0} \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^{1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{0}\right) \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 5\frac{1^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}} \\
&= 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{25}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right)
\end{aligned}
$$

On détermine ensuite la limite pour $n \to \infty$:

$$
\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{25}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right) = \frac{25}{2}
$$

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Analyse

Epreuve complémentaire POL - 2020

Solution de la Question 3

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
  - Fonction
  - Extrema
- Algèbre
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question

(a) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction n'ait pas d'extremum ?

▸ Solution

(b) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction ait un maximum et un minimum et trois zéros différents? (Indice: quel est le signe du produit du maximum et du minimum s'il y a trois zéros différents?)

▸ Solution

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

L'absence d'extrema signifie que la dérivée première n'a pas de zéro ou que pour un zéro de la dérivée première, la dérivée seconde est également égale à 0 et la troisième dérivée est différente de 0. La dérivée de la fonction est

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Il n'y a pas de zéros si $p > 0$.
Pour $p = 0$ on doit détermine la dérivée seconde et la troisième dérivée :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x \\ f^{(3)}(x) &= 6 \end{aligned}$$

Cela signifie que pour $p \geq 0$, il n'y a pas d'extrema.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

Le produit des valeurs de la fonction au maximum et au minimum doit être négatif, le maximum local doit être au-dessus de l'axe des x et le minimum local en dessous :

$$\begin{cases} x_1 & = \sqrt{\frac{-p}{3}} \\ x_2 & = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \end{cases}$$

On introduit les deux extrema dans l'expression de la fonction :

$$\begin{cases} f(x_1) & = \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} + p\frac{(-p)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} - 1 \\ f(x_2) & = -\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} - p\frac{(-p)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} - 1 \end{cases}$$

Le produit des deux doit être inférieur à 0 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} - \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} - 1\right)\left(-\frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} + \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} - 1\right) &< 0 \\ \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{\frac{3}{2}} - 1\right)\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{\frac{3}{2}} - 1\right) &< 0 \\ 1 - \frac{4}{27}(-p)^3 &< 0 \\ p &< -\frac{3}{4^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Préparation au Concours d'Admission
de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Trigonométrie

Epreuve complémentaire POL - 2020
Solution de la Question 4

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
  - Intégrales
- Algèbre
- Trigonométrie
  - Formules usuelles
  - Fonctions trigonométriques de référence
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question

(a) (1 point) Démontrer que pour tout nombre réel x, on a la relation suivante

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x).$$

Indication Solution

(b) (1 point) En déduire une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que,

$$f(x) = \cos^3 x.$$

Solution

(c) (1 point) a étant un nombre réel donné non nul, en déduire la valeur de l'intégrale définie en utilisant une intégration par parties

$$I(a) = \int_0^a (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx.$$

Solution

(d) (1 point) Calculer $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Solution

Indication pour la sous-question (a)

◂ Retour à la question

Appliquer la formule pour le (co)sinus de la somme de deux angles.

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

On applique la formule pour le (co)sinus de la somme de deux angles :

$$\begin{aligned}
\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x \\
&= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\
&= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x \\
&= 4 \cos^3 x - 3 \cos x
\end{aligned}$$

d'où on tire que

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \left(\cos 3x + 3 \cos x\right).$$

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

L'intégration est directe :

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x) \; dx$$
$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + 3 \sin x \right) + C, \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

Par intégration par parties, on retrouve l'intégrale précédente :

$$
\begin{aligned}
\int (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx &= -\frac{1}{3}(2x+1)\cos^3 x + \int \frac{2}{3}\cos^3 x \, dx \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right) \\
&\qquad - \frac{1}{3}(2x+1)\cos^3 x + C.
\end{aligned}
$$

Intégrer entre 0 et a donne :

$$
I(a) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\sin 3a + 3\sin a\right) - \frac{1}{3}(2a+1)\cos^3 a + \frac{1}{3}.
$$

Solution de la sous-question (d)

Retour à la question

On remplace a par $\frac{\pi}{3}$:

$$I\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{18\sqrt{3} + 21 - 2\pi}{72}.$$

Préparation au Concours d'Admission
de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Géométrie

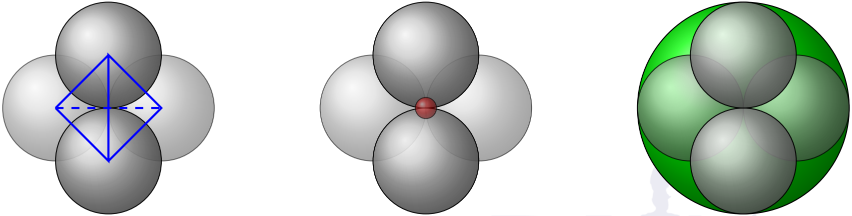
Epreuve complémentaire POL - 2020
Solution de la Question 5

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
- Algèbre
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
    - Géométrie dans l'espace
    - Sphère
    - Distance, volume
- Probabilités et Statistique

Question (partie 1/2)

4 sphères de même rayon r sont empilées de sorte que les points centraux coïncident avec les sommets d'un tétraèdre équilatéral avec arête $2r$. Déterminer le rapport des volumes de la plus petite sphère et de la plus grande sphère qui touchent les 4 autres sphères.



Question (partie 2/2)

(a) (1 point) Dans le triangle formé par les centres des 3 sphères inférieures, calculer la distance entre le centre de gravité et un sommet.

▸ Indication ▸ Solution

(b) (1 point) Dans le tétraèdre formé par les centres des 4 sphères, calculer la distance du centre de gravité (l'isobarycentre, c.-à-d. le point qui se trouve à la même distance des 4 points) à un sommet en utilisant le résultat précédent.

▸ Indication ▸ Solution

(c) (1 point) Calculer le volume de la plus grande sphère (centre donné dans la question précédente).

▸ Solution

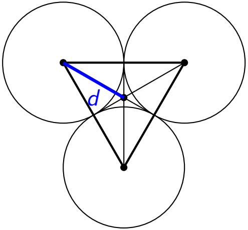
(d) (1 point) Calculer le volume de la plus petite sphère (même centre) et calculer le rapport des deux volumes.

▸ Solution

Indication pour la sous-question (a)

◂ Retour à la question

- Utiliser un triangle auxiliaire

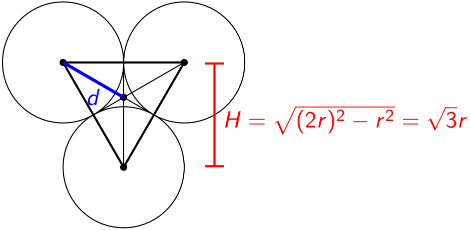


- Considérer la similarité de deux triangles.

Solution de la sous-question (a)

◂ Retour à la question

Le centre des sphères à déterminer est, pour des raisons de symétrie, équidistant de tous les sommets du tétraèdre. Pour déterminer ce centre, nous allons utiliser 2 triangles auxiliaires.



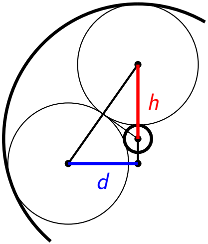
Le premier est un triangle équilatéral dont les sommets sont les centres de trois sphères et dont le côté est de $2r$. Nous pouvons déterminer la distance d d'un sommet au centre en considérant la similitude des triangles :

$$\frac{r}{d} = \frac{H}{2r} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2r^2}{H} = \frac{2}{\sqrt{3}}r.$$

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

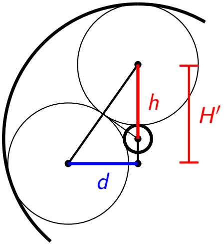
- Utiliser un triangle auxiliaire



- Considérer la similarité de deux triangles.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question



Le second est un triangle rectangle avec $2r$ comme hypoténuse et d comme autre côté. Le point central est équidistant des sommets de l'hypoténuse. La distance au sommet du tétraèdre peut alors être déterminée en considérant la similitude des triangles :

$$\frac{H'}{2r} = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2r^2}{H'} = \frac{2r^2}{\sqrt{(2r)^2 - d^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}r.$$

Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

Le rayon de la grande sphère est alors :

$$R_B = h + r = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right) r$$

et le volume de la grande sphère est donné par

$$V_B = \frac{4}{3}\pi R_B^3.$$

Solution de la sous-question (d)

Retour à la question

Le rayon de la petite sphère est alors :

$$R_b = h - r = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) r$$

et le volume de la petite sphère est donné par $V_b = \frac{4}{3}\pi R_b^3$.
Le rapport de leurs volumes est :

$$\frac{V_b}{V_B} = \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{3}{2}} + 1}\right)^3$$

$$= \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^3$$

$$= 485 - 198\sqrt{6}.$$

Epreuve POL

Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3$, … , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points)

(a) (2 points) Déterminer $k \in \mathbb{R}$, de sorte que pour chaque nombre complexe $z = a + b\mathrm{i}$ avec $b = -2a$ on ait :

$$|z - k + 7\mathrm{i}| = |z - 2 + 9\mathrm{i}|$$

(b) (2 points) $-\mathrm{i}$ est une racine de $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Trouver les autres racines.

Question 2 (4 points) Un patient prend 10 mg d'un médicament le premier jour et les jours suivants 5 mg. Au cours de la journée, 40 % de la substance est décomposée dans le corps. On peut représenter les quantités de médicaments qui se trouvent dans l'organisme immédiatement après la prise du 1er, 2ème, 3ème jour, ... par une suite $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

(a) (1 point) Donner une formule récursive (par récurrence) pour cette suite.

(b) (1 point) Prouver par induction complète (par récurrence) que cette suite est limitée vers le haut.

(c) (1 point) Prouver que la suite est croissante.

(d) (1 point) Déterminer la limite de la suite à l'aide des règles de calcul des limites.

Question 3 (4 points) Soit : $f(x) = x^3 + px - 1$.

(a) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction n'ait pas d'extremum ?

(b) (2 points) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction ait un maximum et un minimum et trois zéros différents ? (Indice : quel est le signe du produit du maximum et du minimum s'il y a trois zéros différents ?)

Question 4 (4 points)

(a) (1 point) Démontrer que pour tout nombre réel x, on a la relation suivante

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

(b) (1 point) En déduire une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que,

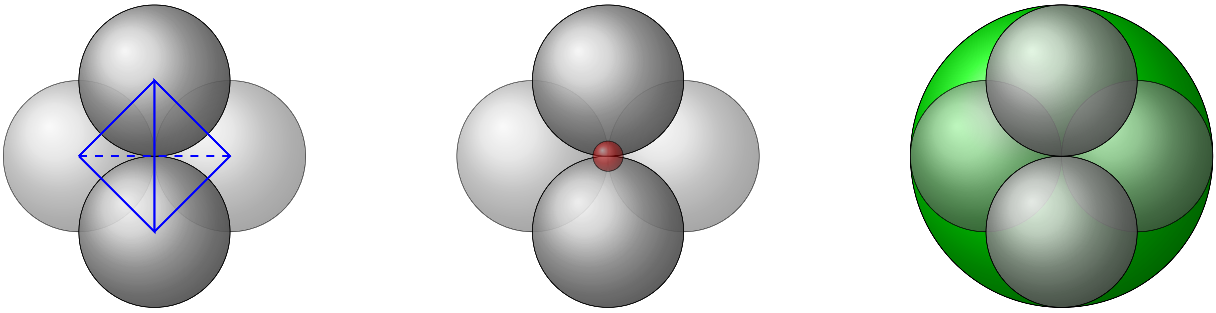
$$f(x) = \cos^3 x$$

(c) (1 point) a étant un nombre réel donné non nul, en déduire la valeur de l'intégrale définie en utilisant une intégration par parties

$$I(a) = \int_0^a (2x + 1)\cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x$$

(d) (1 point) Calculer $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Question 5 (4 points) 4 sphères de même rayon r sont empilées de sorte que les points centraux coïncident avec les sommets d'un tétraèdre équilatéral avec arête $2r$. Déterminer le rapport des volumes de la plus petite sphère et de la plus grande sphère qui touchent les 4 autres sphères.



(a) (1 point) Dans le triangle formé par les centres des 3 sphères inférieures, calculer la distance entre le centre de gravité et un sommet.

(b) (1 point) Dans le tétraèdre formé par les centres des 4 sphères, calculer la distance du centre de gravité (l'isobarycentre, c.-à-d. le point qui se trouve à la même distance des 4 points) à un sommet en utilisant le résultat précédent.

(c) (1 point) Calculer le volume de la plus grande sphère (centre donné dans la question précédente).

(d) (1 point) Calculer le volume de la plus petite sphère (même centre) et calculer le rapport des deux volumes.

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Algèbre

Epreuve complémentaire POL - 2021

Solution de la Question 1

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse

  Exposants et logarithmes
- Algèbre

  Polynômes
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question

On donne le polynôme $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$, avec $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) (2 points) Prouver que $P'(1/2) < 4$.
Indication : commencer par calculer $(x-1)P(x)$.
Indication Solution

(b) (2 points) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ on a

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

Indication: on pourra utiliser la fonction logarithme.
Indication Solution

Indication pour la sous-question (a)

Retour à la question

- Pour $x \neq 1$, montrer que $P(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
- Ensuite, dériver cette expression.
- Substituer $x = \frac{1}{2}$ dans l'expression de $P'(x)$.

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

Suivant l'indication, on calcule :

$$(x-1)P(x) = x^{n+1}+x^n+\ldots+x-(x^n+x^{n-1}+\ldots+1) = x^{n+1}-1.$$

De là, pour $x \neq 1$, $P(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Donc, pour $x \neq 1$,

$$P'(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Pour $x = 1/2$ cela donne

$$P'(1/2) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{(n+1)}{2^n} + 1}{\frac{1}{4}} = 4\left(\frac{1}{2^{n+1}}(n-2(n+1))+1\right)$$
$$= 4\left(1-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right) < 4.$$

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

- En prenant le logarithme de l'expression à démontrer, on se ramène à

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} k \ln(2) < 2 \ln(2).$$

- Ensuite, faire apparaître 4 dans le membre de droite en multipliant par $\frac{2}{\ln(2)}$.
- Observer alors que $P'(1/2)$ apparait dans le membre de gauche. Pour cela, on remarquera que

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}.$$

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

On doit prouver que

$$\prod_{k=1}^{n} (2^k)^{\frac{1}{2^k}} < 4,$$

ou de façon équivalente, vu que la fonction ln est strictement croissante sur son domaine,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} k \ln(2) < 2 \ln(2).$$

En multipliant les deux membres par $\frac{2}{\ln(2)}$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} < 4.$$

Le membre de gauche est égal à $P'(1/2)$ et le fait que l'inégalité ci-dessus soit vraie est donc une conséquence de (**a**).

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Analyse

Epreuve complémentaire POL - 2021

Solution de la Question 2

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
  - Suites et récurrence
  - Intégrales
- Algèbre
- Trigonométrie
  - Formules usuelles
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question

Le terme général de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

(a) (1 point) Calculer les trois premiers termes de la suite, et prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

▸ Indication ▸ Solution

(b) (1 point) Par intégration par parties, prouver que pour tout naturel n non nul, on a

$$(n+1) I_{n+1} = n I_{n-1}.$$

▸ Indication ▸ Solution

(c) (2 points) Prouver par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}_0$, on a

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{g(p)}{h(p)}$$

avec $g(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ et $h(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.
Rappel: $\Pi_{k=1}^{N} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

▸ Indication ▸ Solution

Indication pour la sous-question (a)

Retour à la question

- Pour I_0 et I_1, procéder par un calcul direct.
- Pour I_2, utiliser la formule de Carnot.
- Pour la dernière partie de la sous-question, utiliser un changement de variable.

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

Par un calcul direct,

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

A l'aide d'un changement de variable $x := \frac{\pi}{2} - t$, on obient

$$I_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(\pi/2 - x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

- Calculer I_{n+1} par intégration par parties, $\int u dv = uv - \int v du$, en posant $u = \sin^n t$ et $v = \sin t$.
- Cela permet d'obtenir une expression de I_{n+1} qui fait intervenir I_{n-1} et I_{n+1}.
- En déduire $(n+1)I_{n+1}$ en fonction de n et de I_{n-1}.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

En intégrant par parties, pour $n \in \mathbb{N}_0$, on trouve

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^n t \sin t \, dt \\
&= \left[-\cos t \sin^n t \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} n \sin^{n-1} t \cos^2 t \, dt \\
&= n \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \, (1 - \sin^2 t) dt \\
&= n \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \, dt \right) \\
&= n I_{n-1} - n I_{n+1},
\end{aligned}$$

et le résultat suit directement.

Indication pour la sous-question (c)

Retour à la question

Appliquer, comme suggéré, la méthode de preuve par récurrence:

- Vérifier que la propriété est vraie pour $p = 1$.
- Ensuite, montrer que si la propriété est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}_0$, alors elle est aussi vraie pour $p + 1$. Pour cela:
  - calculer $I_{2(p+1)}$ en utilisant le résultat de la sous-question (b);
  - on doit arriver à prouver que

$$I_{2(p+1)} = \frac{\pi}{2} \frac{g(p+1)}{h(p+1)}.$$

Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

La propriété est vraie pour $p = 1$ vu que $I_2 = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}\frac{g(1)}{h(1)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}$.
Supposons (hypothèse de récurrence) que la propriété est vraie pour $p \in \mathbb{N}_0$. On calcule

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} \overset{(1)}{=} \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \overset{(2)}{=} \frac{\pi}{2} \frac{2p+1}{2p+2} \frac{g(p)}{h(p)} \overset{(3)}{=} \frac{\pi}{2} \frac{g(p+1)}{h(p+1)},$$

où

(1) est justifié par la sous-question (b)

(2) utilise l'hypothèse de récurrence

(3) est basé sur les deux relations suivantes :

$$(2p+1)g(p) = \big(2(p+1)-1\big) \prod_{k=1}^{p} (2k-1) = \prod_{k=1}^{p+1} (2k-1) = g(p+1),$$

$$(2p+2)h(p) = 2(p+1) \prod_{k=1}^{p} 2k = \prod_{k=1}^{p+1} 2k = h(p+1).$$

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Algèbre

Epreuve complémentaire POL - 2021

Solution de la Question 3

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
- Algèbre
    - Polynômes
    - Nombres complexes
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question (partie 1/2)

(a) (1 point) On donne l'équation suivante dans $\mathbb{C}$, avec $i^2 = -1$: $|1 + iz| = |1 - iz|$. Montrer que les solutions sont réelles.

Solution

(b) (1 point) On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z, avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}. \qquad (\ddagger)$$

Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles.

Indication: se ramener au point (a) par un calcul de module.

Solution

Question (partie 2/2)

(c) (1 point) Montrer que l'équation (‡) peut s'écrire sous la forme $\mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha)$, pour un certain $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Rappel: $\mathrm{cis}(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.
Indication: en vertu du point précédent on peut poser $z = \tan\theta$, avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et procéder similairement pour a.
▸ Solution

(d) (1 point) Combien de solutions l'équation (‡) admet-elle ? Trouver ces solutions.
▸ Solution

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

Nous indiquons deux méthodes pour résoudre l'équation, qui montreront que les solutions sont les réels.

Méthode 1 Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On trouve

$$\begin{aligned} |1 + iz| = |1 - z| &\iff |1 + i(x + iy)| = |1 - (x + iy)| \\ &\iff |1 - y + ix| = |1 + y - ix| \\ &\iff (1 - y)^2 + x^2 = (1 + y)^2 + x^2 \\ &\iff y = 0. \end{aligned}$$

De là, la solution est $S = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = 0\}$.

Méthode 2 En utilisant le fait que $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ for $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on obtient

$$\begin{aligned} |1 + iz| = |1 - z| &\iff |1 + iz|^2 = |1 - iz|^2 \\ &\iff (1 + iz)\overline{(1 + iz)} = (1 - iz)\overline{(1 - iz)} \\ &\iff (1 + iz)(1 - i\bar{z}) = (1 - iz)(1 + i\bar{z}) \\ &\iff 1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \\ &\iff -i\bar{z} + iz = i\bar{z} - iz \\ &\iff z = \bar{z}. \end{aligned}$$

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

En utilisant l'indication, on observe que

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \Rightarrow \left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right| = \left|\frac{1+ia}{1-ia}\right|$$

Vu que $\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$, on a aussi que

$$\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = 1$$

ce qui implique que $|1+iz| = |1-iz|$. Vu (**a**) cela implique que $z \in \mathbb{R}$.

Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

Suivant l'indication, puisque $z \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z = \tan\theta$. Observez que $\cos\theta \neq 0$. On calcule

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\mathrm{cis}(\theta)}{\mathrm{cis}(-\theta)} = \mathrm{cis}(2\theta)\left(= e^{2i\theta}\right).$$

De même, avec $a = \tan\alpha$ pour un certain $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a

$$\frac{1+ia}{1-ia} = \mathrm{cis}(2\alpha)\left(= e^{2i\alpha}\right).$$

De là,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \iff \mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha)\left(\iff e^{2in\theta} = e^{2i\alpha}\right).$$

Solution de la sous-question (d)

Retour à la question

Vu que $z \in \mathbb{R}$, $1 - iz \neq 0$ et l'équation est équivalente avec l'équation polynomiale de degré n suivante :

$$(1+iz)^n - \frac{1+ia}{1-ia}(1-iz)^n = 0,$$

qui possède exactement n solutions (comptées avec leur multiplicité), par le théorème fondamental de l'algèbre.
La solution de (‡) est obtenue est utilisant la forme cis (ou la forme exponentielle) :

$$\mathrm{cis}(2n\theta) = \mathrm{cis}(2\alpha) \iff 2n\theta = 2\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En conclusion, les n solutions $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sont données par

$$z_k = \tan\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Géométrie

Epreuve complémentaire POL - 2021
Solution de la Question 4

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
- Algèbre
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
  - Vecteurs
  - Equations de droite
  - Equations de plan
- Probabilités et Statistique

Question (partie 1/2)

On note $\lambda = \{AB, M\}$ le rapport de section suivant lequel le point M partage le vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{MB}.$$

On considère un prisme à bases triangulaires comme représenté sur le schéma ci-dessous (à gauche), sur lequel on place un repère orthonormé de sorte que l'on ait les trois points $A_0(0,0,0)$, $C_0(0,3,0)$ et $B_1(1,2,5)$.
On prend sur la diagonale A_0B_1 un point P tel que $\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4}$.
Π est le plan passant par P et parallèle aux diagonales A_1C_0 et B_0C_1. Le plan Π coupe la droite C_0C_1 au point R.

(a) (1 point) Montrer que l'équation cartésienne du plan Π est $20x + 5y + 3z = 25$.

Solution

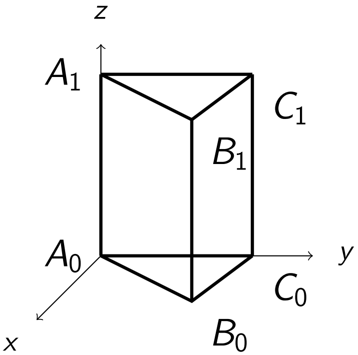
(b) (1 point) Déterminer le rapport de section $\{C_0C_1, R\}$.

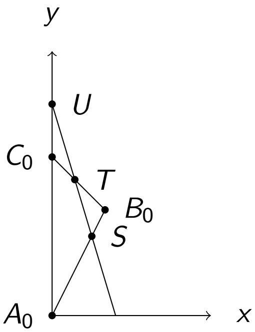
Indication Solution

Question (partie 2/2)

(c) (2 points) Considérons le triangle $A_0B_0C_0$. On choisit trois points alignés S, T, U de sorte que l'on puisse écrire $\lambda_1 = \{A_0B_0, S\}$, $\lambda_2 = \{B_0C_0, T\}$, $\lambda_3 = \{C_0A_0, U\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$, comme illustré ci-dessous (à droite). Le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ est alors constant. Déterminer la valeur de cette constante.

▸ Indication ▸ Solution





Solution de la sous-question (a)

◂ Retour à la question

On détermine d'abord les coordonnées de P (qui est l'extrémité du vecteur $\vec{P}$) :

$$\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4} \iff \overrightarrow{A_0P} = \frac{5}{4}\overrightarrow{PB_1} \iff \vec{P} - \vec{A_0} = \frac{5}{4}(\vec{B_1} - \vec{P})$$

et donc

$$\vec{P} = \frac{4}{9}\frac{5}{4}\vec{B_1} = \frac{5}{9}\vec{B_1} = \frac{5}{9}(1, 2, 5).$$

Le plan Π est parallèle aux vecteurs suivants :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1C_0} &= (0, 3, 0) - (0, 0, 5) = (0, 3, -5)\\ \overrightarrow{B_0C_1} &= (0, 3, 5) - (1, 2, 0) = (-1, 1, 5).\end{aligned}$$

Il existe différentes façons d'obtenir l'équation du plan. Par exemple, supposons que $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$ détermine la direction normale à Π. On a

$$\begin{aligned}(0, 3, -5) \cdot (n_1, n_2, n_3) &= 0\\ (-1, 1, 5) \cdot (n_1, n_3, n_3) &= 0.\end{aligned}$$

En additionnant ces deux équations, on obtient $-n_1 + 4n_2 = 0$. Si on choisit $n_2 = 1$, alors $n_1 = 4$ et en utilisant la première équation, $n_3 = \frac{3}{5}$. La direction normale est donc $(1, 4, 3/5)$ et l'équation du plan est

$$20x + 5y + 3z = c,$$

où $c = 25$ vu que $P \in \Pi$.

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

On peut écrire $R = (0, 3, z_r)$, où z_r est déterminé par le fait que $R \in \Pi$.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

Puisque R appartient à la droite C_0C_1, on peut écrire

$$R = (0, 3, z_r),$$

où z_r est déterminé par le fait que $R \in \Pi$:

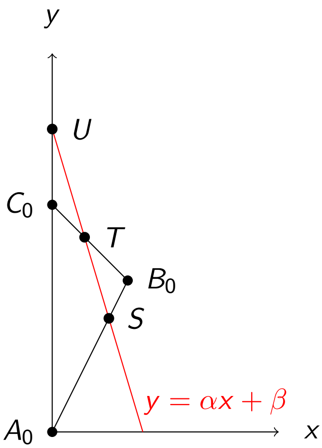
$$15 + 3z_r = 25 \Rightarrow z_r = \frac{10}{3}.$$

De là,

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{C_0R} = \{C_0C_1, R\}\overrightarrow{RC_1} \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(0, 0, \frac{10}{3}\right) = \{C_0C_1, R\}\left(0, 0, 5 - \frac{10}{3}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & \{C_0C_1, R\} = 2. \end{aligned}$$

Indication pour la sous-question (c)

Retour à la question



- On peut choisir des valeurs numériques pour α et β.
- Exprimer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en fonction de α et β.

Solution de la sous-question (c) – (partie 1/3)

Retour à la question

Pour simplifier, on considère les points S, T, U comme des points du plan (x, y), et on omet la troisième coordonnée :

$$S = (x_s, y_s), \qquad T = (x_t, y_t), \qquad U = (x_u, y_u).$$

On a

$$\begin{array}{lclcl}
\lambda_1 = \{A_0B_0, S\} & \Rightarrow & S \in A_0B_0 & \Rightarrow & y_s = 2x_s \\
\lambda_2 = \{B_0C_0, T\} & \Rightarrow & T \in B_0C_0 & \Rightarrow & y_t = 3 - x_t \\
\lambda_3 = \{C_0A_0, U\} & \Rightarrow & U \in C_0A_0 & \Rightarrow & x_u = 0.
\end{array}$$

Vu que S, T, U appartiennent à la même droite d'équation $y = \alpha x + \beta$, on trouve aussi que :

$$\begin{array}{rclcl}
2x_s = \alpha x_s + \beta & \Rightarrow & x_s = \dfrac{\beta}{2-\alpha} \\
3 - x_t = \alpha x_t + \beta & \Rightarrow & x_t = \dfrac{-\beta + 3}{\alpha + 1} \\
y_u = \beta. & &
\end{array}$$

Observons que $\alpha \neq 2$ et $\alpha \neq -1$ sinon S, T ne sont pas bien définis. Il est donc permis de diviser par $2 - \alpha$ ou $\alpha + 1$.

Solution de la sous-question (c) – (partie 2/3)

Retour à la question

La position de S, T, U est entièrement déterminée par la position de la droite qui relie ces trois points, autrement dit, par α et β. Nous voulons exprimer le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ en utilisant ces deux paramètres. Par définition des λ_i, on a

$$\begin{aligned} x_s &= \lambda_1(1 - x_s) \\ x_t - 1 &= \lambda_2(-x_t) \\ y_u - 3 &= \lambda_3(-y_u), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{x_s}{1 - x_s}\frac{x_t - 1}{-x_t}\frac{y_u - 3}{-y_u}.$$

En remplaçant x_s, x_t, y_u par leur expression en fonction de α, β, on obtient

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{\beta}{2 - \alpha - \beta}\frac{-\beta + 3 - \alpha - 1}{\beta - 3}\frac{\beta - 3}{-\beta} = -1.$$

Remarque : Comme mentionné dans la question (c), le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ est constant. Par conséquent, on peut choisir *n'importe quels* trois points alignés S, T, U pour effectuer le calcul. En d'autres termes, on peut choisir des valeurs arbitraires pour α et β. La seule contrainte est que S doit être différent de A_0 et B_0 (et de même pour T et U) car $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$.

- A_0 n'est pas sur la droite $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \beta \neq 0$
- B_0 n'est pas sur la droite $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \alpha + \beta \neq 2$
- C_0 n'est pas sur la droite $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \beta \neq 3$

Nous voyons que ces 3 conditions impliquent que la simplification que nous avons effectuée dans la dernière étape de la solution est valide.

Préparation au Concours d'Admission
de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Probabilités

Epreuve complémentaire POL - 2021
Solution de la Question 5

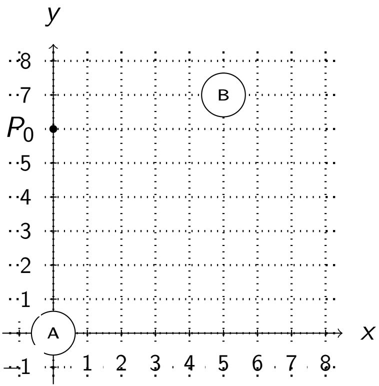
Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
- Algèbre
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique
  - Dénombrement
  - Loi binomiale

Question (partie 1/2)

Alice (A) et Bob (B) se déplacent dans le plan de coordonnées, selon une séquence de pas de longueur 1. Ils effectuent chaque pas simultanément.

Alice démarre en $(0, 0)$ et effectue chaque pas au hasard vers la droite ou vers le haut, de façon équiprobable. Bob démarre en $(5, 7)$ et effectue chaque pas au hasard vers la gauche ou vers le bas, de façon équiprobable.



Question (partie 2/2)

(a) (1 point) Quelle est la probabilité que Alice et Bob se rencontrent au point $P_0(0, 6)$?

Solution

(b) (1 point) Déterminer les autres points $(P_1, P_2, \ldots)$ où il est possible que Alice et Bob se recontrent.

Solution

(c) (2 points) Quelle est la probabilité que Alice et Bob se rencontrent ?

Solution

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

Alice et Bob ne peuvent se rencontrer qu'après s'être déplacés tous les deux de 6 pas, car il y a 12 pas entre leurs positions initiales. Soit a_0 le nombre de chemins possibles de $(0,0)$ jusqu'à P_0 et soit b_0 le nombre de chemins possibles de $(5,7)$ jusqu'à P_0. On a

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad b_0 = \binom{6}{1} = 6.$$

Ils peuvent chacun emprunter 2^6 chemins différents en 6 pas. Dès lors la probabilité qu'ils se rencontrent en P_0 est

$$\frac{1}{2^{12}} a_0 b_0 = \frac{6}{2^{12}}.$$

Remarque : On peut aussi travailler directement en termes de probabilités. Dans ce cas :

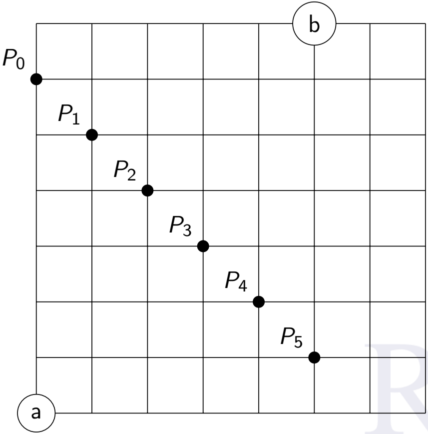
- Soit α_0 la probabilité que Alice atteigne P_0 (après 6 pas): $\alpha_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$
- Soit β_0 la probabilité que Bob atteigne P_0 (après 6 pas): $\beta_0 = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{2^6}$.
- La probabilité qu'ils se rencontrent en P_0 est $\alpha_0\beta_0 = \frac{6}{2^{12}}$.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

Alice doit faire i pas vers la droite, et Bob doit faire $i+1$ pas vers le bas pour se rencontrer, avec $i = 0, \ldots, 5$. Les autres lieux de rencontre sont donc :

$$P_1 = (1,5), \quad P_2 = (2,4), \quad P_3 = (3,3), \quad P_4 = (4,2), \quad P_5(5,1).$$



Solution de la sous-question (c)

Retour à la question

Soit a_i le nombre de chemins possibles de $(0,0)$ à P_i et soit b_i le nombre de chemins possibles de $(5,7)$ à P_i, $i = 0, \ldots, 5$. On a

$$a_i = \binom{6}{i} \quad \text{et} \quad b_i = \binom{6}{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, 5.$$

La probabilité qu'ils se rencontrent est

$$\frac{1}{2^{12}} \sum_{i=0}^{5} a_i b_i = \frac{1}{2^{12}} \sum_{i=0}^{5} \binom{6}{i}\binom{6}{i+1}$$
$$= \frac{1}{2^{12}}(6 + 90 + 300 + 300 + 90 + 6) = \frac{792}{2^{12}} = \frac{99}{512}.$$

Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2021 | Analyse - Algèbre - Géométrie - Probabilités | Série A

5 questions - 4 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points)

On donne le polynôme $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$, avec $n \in \mathbb{N}_0$.

(**a**) (2 points) Prouver que $P'(1/2) < 4$.
Indication : commencer par calculer $(x-1)P(x)$.

(**b**) (2 points) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ on a

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

Indication: on pourra utiliser la fonction logarithme.

Question 2 (4 points)

Le terme général de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

(**a**) (1 point) Calculer les trois premiers termes de la suite, et prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

(**b**) (1 point) Par intégration par parties, prouver que pour tout naturel n non nul, on a

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}.$$

(**c**) (2 points) Prouver par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}_0$, on a

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{g(p)}{h(p)}$$

avec $g(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ et $h(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.
Rappel: $\Pi_{k=1}^{N} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

Question 3 (4 points)

(**a**) (1 point) On donne l'équation suivante dans $\mathbb{C}$, avec $i^2 = -1$: $|1+iz| = |1-iz|$. Montrer que les solutions sont réelles.

(**b**) (1 point) On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z, avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}. \qquad (\ddagger)$$

Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles.

Indication: se ramener au point (a) par un calcul de module.

(**c**) (1 point) Montrer que l'équation $(\ddagger)$ peut s'écrire sous la forme $\text{cis}(2n\theta) = \text{cis}(2\alpha)$, pour un certain $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Rappel: $\text{cis}(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.
Indication: en vertu du point précédent on peut poser $z = \tan\theta$, avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et procéder similairement pour a.

(**d**) (1 point) Combien de solutions l'équation $(\ddagger)$ admet-elle ? Trouver ces solutions.

Question 4 (4 points)

On note $\lambda = \{AB, M\}$ le rapport de section suivant lequel le point M partage le vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire

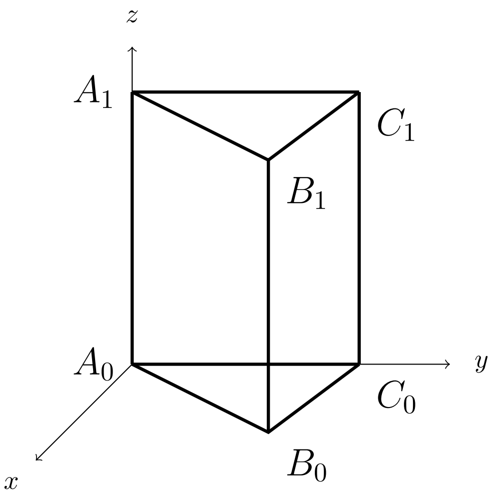
$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}.$$

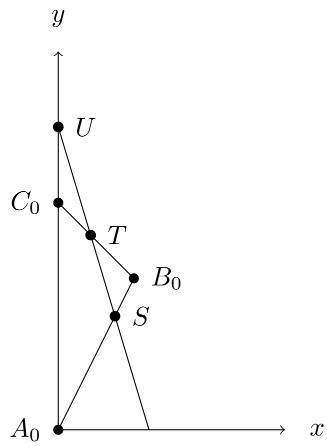
On considère un prisme à bases triangulaires comme représenté sur le schéma ci-dessous (à gauche), sur lequel on place un repère orthonormé de sorte que l'on ait les trois points $A_0(0,0,0)$, $C_0(0,3,0)$ et $B_1(1,2,5)$.
On prend sur la diagonale A_0B_1 un point P tel que $\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4}$.
Π est le plan passant par P et parallèle aux diagonales A_1C_0 et B_0C_1. Le plan Π coupe la droite C_0C_1 au point R.

(**a**) (1 point) Montrer que l'équation cartésienne du plan Π est $20x + 5y + 3z = 25$.

(**b**) (1 point) Déterminer le rapport de section $\{C_0C_1, R\}$.

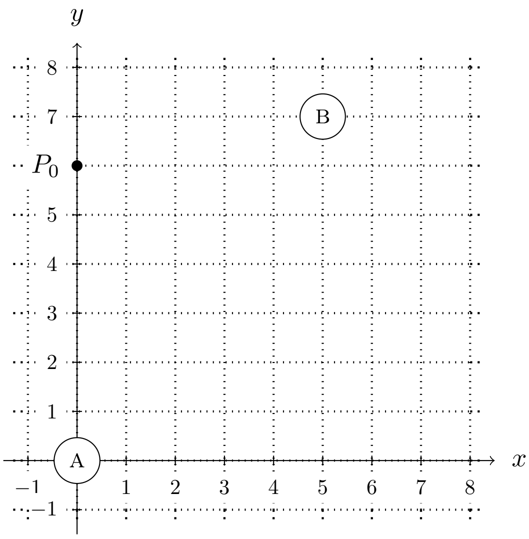
(**c**) (2 points) Considérons le triangle $A_0B_0C_0$. On choisit trois points alignés S, T, U de sorte que l'on puisse écrire $\lambda_1 = \{A_0B_0, S\}$, $\lambda_2 = \{B_0C_0, T\}$, $\lambda_3 = \{C_0A_0, U\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$, comme illustré ci-dessous (à droite). Le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ est alors constant. Déterminer la valeur de cette constante.





Question 5 (4 points)

Alice (A) et Bob (B) se déplacent dans le plan de coordonnées, selon une séquence de pas de longueur 1. Ils effectuent chaque pas simultanément.
Alice démarre en $(0,0)$ et effectue chaque pas au hasard vers la droite ou vers le haut, de façon équiprobable. Bob démarre en $(5,7)$ et effectue chaque pas au hasard vers la gauche ou vers le bas, de façon équiprobable.



(**a**) (1 point) Quelle est la probabilité que Alice et Bob se rencontrent au point $P_0(0,6)$?

(**b**) (1 point) Déterminer les autres points $(P_1, P_2, \ldots)$ où il est possible que Alice et Bob se recontrent.

(**c**) (2 points) Quelle est la probabilité que Alice et Bob se rencontrent ?

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Analyse

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 1, Question 1

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- Analyse
  - Suites
- Trigonométrie
- Géométrie

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
- Géométrie analytique
- Probabilités et statistique

Question & solution

Les éléments de la suite (u_n) satisfont à

$$u_0 = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad 3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) (1 point) Montrer que la suite $(u_n + \frac{1}{3})$ est une suite géométrique de raison 2.

Ecrire $u_{n+1} + \frac{1}{3}$ en fonction de $u_n + \frac{1}{3}$.

Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, on utilise la relation de récurrence donnée dans l'énoncé:
$3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} + \frac{1}{3} = 2\left(u_n + \frac{1}{3}\right)$.

(b) (2 points) Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n.

Trouver d'abord une expression explicite pour $u_n + \frac{1}{3}$ en fonction de n à l'aide de (a).

$u_{n+1} + \frac{1}{3} = 2\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = 2^2\left(u_{n-1} + \frac{1}{3}\right) = \ldots = 2^{n+1}\left(u_0 + \frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow \quad u_n + \frac{1}{3} = 2^n\left(u_0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2^{n+1}}{3}$

$\Rightarrow \quad u_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1).$

(c) (2 points) Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Utiliser (a) et la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 + \ldots + u_n &= \left(u_0 + \frac{1}{3}\right) + \left(u_1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{1}{3}\right) - (n+1)\frac{1}{3} \\
&= \frac{\left(u_0 + \frac{1}{3}\right) - \left(u_n + \frac{1}{3}\right) \cdot 2}{1 - 2} - (n+1)\frac{1}{3} \\
&= 2 \cdot \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3} - (n+1)\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(2^{n+2} - n - 3\right).
\end{aligned}$$

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Analyse

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 1, Question 2

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- Analyse
  - Dérivées
  - Intégrales
- Trigonométrie
- Géométrie

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
- Géométrie analytique
- Probabilités et statistique

Question & solution

Les fonctions cosh et sinh sont données par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$, où l'accent ($'$) indique la dérivée.

(a) (1 point) Calculer la dérivée de $\cosh(\sinh(\cosh(x)))$ en $x = 0$.

Première étape: $\left(\cosh \circ \sinh \circ \cosh\right)'(x) = \left(\cosh' \circ \sinh \circ \cosh\right)(x) \cdot \left(\sinh \circ \cosh\right)'(x)$.

$$\left(\cosh \circ \sinh \circ \cosh\right)'(x) = \left(\cosh' \circ \sinh \circ \cosh\right)(x) \cdot \left(\sinh' \circ \cosh\right)(x) \cdot \cosh'(x).$$

$$\sinh(0) = \tfrac{e^0 - e^0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\cosh \circ \sinh \circ \cosh\right)'(0) = \sinh(\sinh(\cosh(0)))\cosh(\cosh(0))\sinh(0) = 0.$$

(b) (1 point) Prouver que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \tfrac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \tfrac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \tfrac{1}{4}(2+2) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) (1 point) Prouver que $2\sinh^2(x) = \cosh(2x) - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$2\sinh^2(x) = 2\cdot\tfrac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right) = \cosh(2x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(d) (2 points) Prouver que

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{const.},$$

par substitution $x = \cosh\theta$ avec $x \geq 1,\ \theta \geq 0$. On pourra utiliser les sous-questions (b) et (c).

Commencer par prouver que $\int\sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\frac{\sinh 2\theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{const.}$

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{x^2-1}dx &= \int\sqrt{\cosh^2\theta - 1}\sinh\theta\, d\theta \qquad \text{avec} \qquad x = \cosh\theta \geq 1,\ \theta \geq 0 \\
&\overset{(a)}{=} \int \sinh^2\theta d\theta \\
&\overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\int(\cosh 2\theta - 1)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sinh 2\theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{const.} \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{x\sqrt{x^2-1}}_{\text{(i)}} - \frac{1}{2}\underbrace{\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}_{\text{(ii)}} + \text{const.}
\end{aligned}$$

Pour (i):

$$\frac{\sinh 2\theta}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^{2\theta} - e^{-2\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right) = \cosh\theta\sinh\theta = x\sqrt{x^2 - 1}.$$

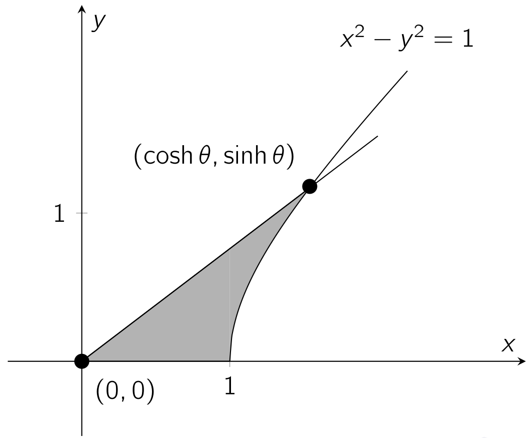
Pour (ii):

$$x = \cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2\theta} - 2xe^{\theta} + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\theta} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

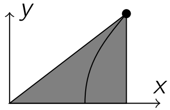
Comme $\theta \geq 0$, il vient $\theta = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

(e) (2 points) Prouver que l'aire de la région colorée ci-contre vaut $\frac{\theta}{2}$, où θ est un réel positif.

Cette région est délimitée par l'axe des x, la courbe $x^2 - y^2 = 1$ et la droite passant par l'origine et le point $(\cosh\theta, \sinh\theta)$.

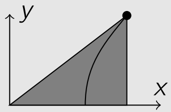


Première étape:

Aire colorée $=$ Aire $\Bigg($ 

$\Bigg) - \displaystyle\int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\,dx$

et utiliser (d).

Aire colorée $=$ Aire $\Bigg($ 

$\Bigg) - \displaystyle\int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\,dx$

(d) $\Rightarrow \quad \displaystyle\int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cosh\ominus\sinh\ominus - \frac{\ominus}{2}\right]_0^{\theta} = \frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \frac{\theta}{2}.$

$$= \frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \left(\frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \frac{\theta}{2}.$$

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Trigonométrie

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 1, Question 3

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- Analyse
- Trigonométrie
  - Equations
- Géométrie

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
- Géométrie analytique
- Probabilités et statistique

Question & solution

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\big(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x + \cos 11x\big) \cdot \sin x = -\frac{1}{4}.$$

Première étape:

$$\big(\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 11x\big) \cdot \sin x = \cos x \sin x + \cos 3x \sin x + \ldots + \cos 11x \sin x.$$

Deuxième étape: Formules de Simpson.

Vu que $2\cos A \cdot \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$, on obtient:

$$\begin{aligned} 2\ \cos x\ \sin x &= \sin 2x - \sin 0 \\ 2\ \cos 3x\ \sin x &= \sin 4x - \sin 2x \\ 2\ \cos 5x\ \sin x &= \sin 6x - \sin 4x \\ &\vdots \\ 2\ \cos 11x\ \sin x &= \sin 12x - \sin 10x \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\big(\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 11x\big) \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 12x.$$

L'équation devient

$$\sin 12x = -\frac{1}{2}.$$

Les solutions sont

$$12x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad 12x = \frac{7\pi}{6} + 2k'\pi,\ \ k' \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire

$$x = -\frac{\pi}{72} + k\frac{\pi}{6},\ \ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{72} + k'\frac{\pi}{6},\ \ k' \in \mathbb{Z}.$$

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Géométrie

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 1, Question 4

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

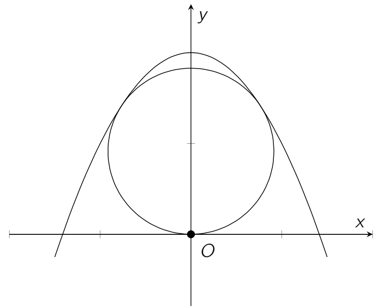
- Analyse
  - Dérivée
- Trigonométrie
- Géométrie
  - Raisonnement et construction

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
- Géométrie analytique
  - Cercle et parabole
- Probabilités et statistique

Question & solution

Dans un système d'axes Oxy, déterminer le rayon du plus grand cercle situé au-dessus de l'axe des x et en-dessous de la parabole d'équation $y = -x^2 + 2$, comme représenté ci-contre.



- Aux points d'intersection entre le cercle et la parabole, le cercle et la parabole ont la même tangente.
- L'équation du cercle est $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, où R est le rayon.

Equation du cercle:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} + R.$$

Points d'intersection entre le cercle et la parabole:

$$(x, y) = (\pm a, b).$$

En $x = a$ suivant la parabole et le cercle on a

$$\begin{aligned} &\text{même ordonnée} \quad (\text{équation 1}) : \qquad && -a^2 + 2 = \sqrt{R^2 - a^2} + R \\ &\text{même dérivée} \quad (\text{équation 2}) : \qquad && -2a = \frac{1}{2}\frac{-2a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \end{aligned}$$

Il en découle que:

$$\begin{aligned} R^2 - a^2 &= \frac{1}{4} \qquad && (\text{équation 2 après simplification}) \\ R + a^2 &= \frac{3}{2} \qquad && (\text{équation 2 dans équation 1}) \end{aligned}$$

On veut déterminer R. On additionne les équations membre à membre:

$$R^2 + R - \frac{7}{4} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad R_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{8}}{2}.$$

Le rayon est $R = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Algèbre

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 2, Question 1

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- Analyse
- Trigonométrie
- Géométrie

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
  - Polynômes
- Géométrie analytique
- Probabilités et statistique

Question & solution

Trouver un polynôme $p(x)$ tel que $p(x) - p'(x) = x^9$. Déterminer d'abord le degré de $p(x)$. Exprimer les coefficients à l'aide de factoriels.

- Montrer que $p(x)$ s'écrit:
$$p(x) = a_9 x^9 + a_8 x^8 + a_7 x^7 + \ldots + a_1 x + a_0.$$
- Ensuite, utiliser l'équation $p(x) - p'(x) = x^9$.

On trouve d'abord le degré du polynôme:

$$p(x) - p'(x) = x^9 \quad \Rightarrow \quad \deg\,(p(x)) = 9.$$

Il en découle que:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_9 x^9 + a_8 x^8 + a_7 x^7 + \ldots + a_1 x + a_0 \\ p'(x) &= 9a_9 x^8 + 8a_8 x^7 + 7a_7 x^6 + \ldots + a_1 \end{aligned}$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_9$ des coefficients à déterminer. On utilise ensuite l'équation donnée dans l'énoncé:

$$p(x) - p'(x) = x^9 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_9 & = 1 \\ a_8 - 9a_9 & = 0 \\ a_7 - 8a_8 & = 0 \\ \quad \vdots & \\ a_1 - 2a_2 & = 0 \\ a_0 - a_1 & = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_9 & = 1 & = 9!/9! \\ a_8 & = 9 & = 9!/8! \\ a_7 & = 9 \cdot 8 & = 9!/7! \\ \quad \vdots & & \\ a_1 & = 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 & = 9!/1! \\ a_0 & = 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 & = 9!/0! \end{cases}$$

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Algèbre

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 2, Question 2

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- Analyse
- Trigonométrie
- Géométrie

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
  - Nombres complexes
- Géométrie analytique
- Probabilités et statistique
  - Probabilité d'un événement, combinatoire

Question & solution

On choisit au hasard deux solutions z_1 et z_2 différentes de l'équation dans $\mathbb{C}$

$$z^{12} - 1 = 0.$$

(a) (2 points) Commencer par donner toutes les solutions de cette équation sous leur forme $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$. Représenter ces solutions dans le plan complexe.

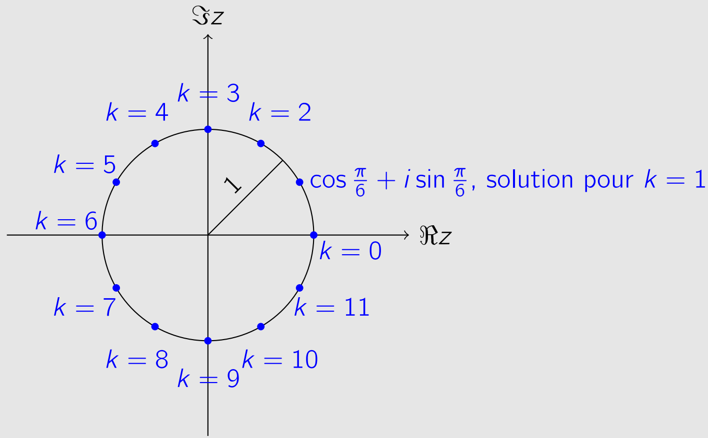
- Notation: $\rho \operatorname{cis}(\theta) = \rho (\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}$.
- $1 = \operatorname{cis}(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- De Moivre:

$$(\rho \operatorname{cis}(\theta))^{12} = \rho^{12} \operatorname{cis}(12\,\theta).$$

Il y a 12 solutions qui ont un module égal à 1 et qui sont données par:

$$\operatorname{cis}\left(k\frac{\pi}{6}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 11.$$

Chaque solution correspond à un point sur le cercle de rayon 1 dans le plan complexe.

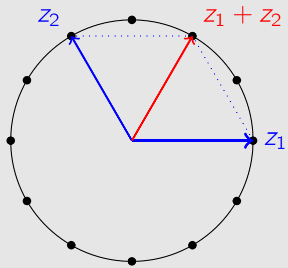


(b) (2 points) Déterminer la probabilité que $|z_1 + z_2| = 1$.

Déterminer l'angle que doivent former les deux vecteurs reliant z_1 et z_2.

Condition: angle de 120 degrés (comme indiqué sur le dessin). En effet, dans ce cas on voit que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| \cos 60^\circ + |z_2| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$



On calcule maintenant $\Pr\{|z_1+z_2|=1\}$.

- Cas possibles (nombres de paires de solutions): $\binom{12}{2}$.
- Cas favorables (nombres de paires avec un angle de 120 degrés): $\frac{12\times 2}{2}$.

La probabilité demandée est

$$\Pr\{|z_1+z_2|=1\} = \frac{\frac{12\times 2}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{2}{11}.$$

Interprétation: pour une racine z_1 choisie aléatoirement, il y a 2 cas favorables et 11 cas possibles pour le choix de z_2.

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Probabilités

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 2, Question 3

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- Analyse
- Trigonométrie
- Géométrie

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
- Géométrie analytique
- Probabilités et statistique
    - Combinatoire

Question & solution

Une solution entière positive de l'équation

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r, \quad n \geq 1, \quad r \geq 0,$$

d'inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, s'écrit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont des entiers ordonnés tels que $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = r$ et $e_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On définit de manière analogue la notion de solution entière positive pour une inéquation de la forme

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq r.$$

Par exemple, $(0, 2)$, $(2, 0)$ et $(1, 1)$ sont trois solutions entières positives différentes de l'équation $x_1 + x_2 = 2$, mais ce n'est pas le cas de $(-1, 3)$ ni de $(1/2, 3/2)$.

(a) (2 points) Déterminer le nombre de solutions entières positives de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9.$$

- Distinguer les différentes valeurs possibles pour x_1. On commence par le cas le plus simple, où $x_1 = 9$, car alors il n'y a qu'une seule solution possible: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9, 0, 0, 0)$.
- Une fois que x_1 est fixé, déterminer les valeurs possibles pour x_2 (et ainsi de suite pour x_3 et x_4).

Dans le tableau, la colonne # Sol. représente le nombre de solutions différentes.

			# Sol.
$x_1 = 9$	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 0$	1
$x_1 = 8$	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 1$	2
$x_1 = 7$	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 2$	3
$x_1 = 6$	$x_2 = 3$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 2$	3
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 3$	4
$x_1 = 5$	$x_2 = 4$	$x_3 + x_4 = 0$	1
	$x_2 = 3$	$x_3 + x_4 = 1$	2
	$x_2 = 2$	$x_3 + x_4 = 2$	3
	$x_2 = 1$	$x_3 + x_4 = 3$	4
	$x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 4$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Autres lignes du tableau:

On observe que si $x_1 = a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ et $x_2 = b \in \{0, \ldots, 9-a\}$, alors le nombre de solutions de l'équation $x_3 + x_4 = 9 - a - b$ est donné par $9 - a - b + 1 = 10 - a - b$. En effet, les valeurs possibles pour x_3 sont tous les nombres naturels de 0 à $9 - a - b$, et pour chaque valeur de x_3 il y a une seule valeur possible pour x_4.

Pour trouver le nombre total de solutions, on additionne toutes les valeurs dans la dernier colonne du tableau:

$$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\ldots+(1+2+\ldots+10)=220.$$

(b) (1 point) En déduire le nombre de solutions entières positives de l'inéquation $x_1+x_2+x_3 \leq 9$.

$$x_1+x_2+x_3 \leq 9 \quad (x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{N}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1+x_2+x_3+x_4 = 9 \quad (x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{N})$$

Comme pour **(a)**, 220 solutions.

(c) (1 point) De combien de façons différentes peut-on distribuer 9 pièces de 1 euro à Amber, Billie, Candice et Djamel ? Il n'est pas obligatoire que chacun reçoive au moins un euro.

Amber: x_A euros, Billie: x_B euros, Candice: x_C euros, Djamel: x_D euros.
On doit compter les solutions entières positives de l'équation

$$x_A+x_B+x_C+x_D=9.$$

(a) $\Rightarrow$ 220 manières différentes.

(d) (2 points) Déterminer le nombre de suites différentes réalisables avec les 12 symboles suivants :

$$\{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\star,\star,\star\}.$$

Chaque symbole est utilisé exactement une fois. Par exemple,

$$(\bullet,\bullet,\star,\bullet,\star,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\star) \qquad \text{et} \qquad (\star,\bullet,\bullet,\star,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\star,\bullet,\bullet,\bullet)$$

sont deux suites différentes. Les $\bullet$ sont indiscernables entre eux, et les $\star$ aussi.

Choisir 3 positions pour les $\star$ parmi 12 positions:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220.$$

Remarque sur le lien avec **(a)**:

La position des trois symboles $\star$ permet de répartir les symboles $\bullet$ en 4 groupes, ce qui correspond chaque fois à une solution de l'équation en **(a)**. Par exemple,

$$(\underbrace{\bullet,\bullet}_{x_1=2},\star,\underbrace{\bullet}_{x_2=1},\star,\underbrace{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet,\bullet}_{x_3=6},\star\underbrace{}_{x_4=0}).$$

Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique
Ecole Royale Militaire

Géométrie Analytique

Epreuve complémentaire POL - 2022. Solution de la Partie 2, Question 4

Position de la question dans le plan des matières

Partie 1 de l'examen

- Analyse
- Trigonométrie
- Géométrie

Partie 2 de l'examen

- Algèbre
- Géométrie analytique
  - Equations de droites et de plan dans l'espace
- Probabilités et statistique

Question & solution

On donne les équations cartésiennes de trois droites d_1, d_2, d_3 dans l'espace :

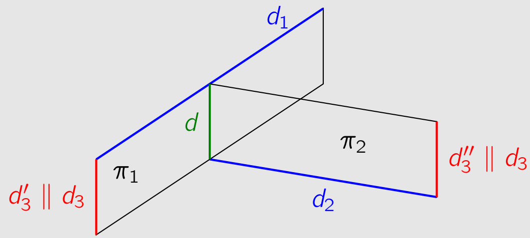
$$d_1 \equiv \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} , \qquad d_2 \equiv \begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases} , \qquad d_3 \equiv \begin{cases} z = y \\ x = -2 \end{cases} .$$

Déterminer les équations cartésiennes de la droite qui coupe d_1 et d_2, et qui est parallèle à d_3. Commencer par faire un croquis.

- Construire un plan π_1 qui contient d_1 et qui est parallèle à d_3.
- Construire un plan π_2 qui contient d_2 et qui est parallèle à d_3.
- La droite recherchée est donnée par l'intersection des deux plans.

On a besoin de vecteurs directeurs des trois droites.

$$d_1 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad d_2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad d_3 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$



$$d = \pi_1 \cap \pi_2, \quad \pi_1 \perp \vec{n}_1, \quad \pi_2 \perp \vec{n}_2.$$

On veut déterminer $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

$$\begin{cases} (a,b,c)\circ(1,0,1) & = 0 \\ (a,b,c)\circ(0,1,1) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+c & = 0 \\ b+c & = 0 \end{cases} \iff \vec{n}_1 \parallel (1,1,-1).$$

$$\begin{cases} (a',b',c')\circ(1,1,0) & = 0 \\ (a',b',c')\circ(0,1,1) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a'+b' & = 0 \\ b'+c' & = 0 \end{cases} \iff \vec{n}_2 \parallel (1,-1,1).$$

Les deux plans ont pour équation

$$\pi_1 \equiv x+y-z = e, \qquad \pi_2 \equiv x-y+z = e'.$$

En remarquant que $(0,0,0) \in \pi_1$ et $(0,0,1) \in \pi_2$, on détermine complètement les équations des deux plans ($e = 0,\ e' = 1$).

On a donc trouvé que

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x + y - z & = 0 \\ x - y + z & = 1 \end{array} \right. .$$

Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2023 Analyse - Trigonométrie - Géométrie **Série A Partie 1**

4 questions - 3 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	5	5	5	5	20

Question 1 .... **5 points**

La fonction g est donnée par

$$g(x) = \int_{-1}^{1} f(u)|x-u|du,$$

où $x \in]-1,1[$ et f est une fonction continue telle que $f(0) = 1$. (On notera que $|x-u|$ désigne la valeur absolue de $x-u$.)

(a) (3 points) Montrer que la dérivée de g est donnée par :

$$g'(x) = \int_{-1}^{x} f(u)du - \int_{x}^{1} f(u)du.$$

(b) (2 points) Déterminer la dérivée seconde de la fonction g en $x = 0$.

Question 2 .... **5 points**

Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}dx$ en commençant par le changement de variable $x = \pi - y$.

Question 3 .... **5 points**

On donne la fonction

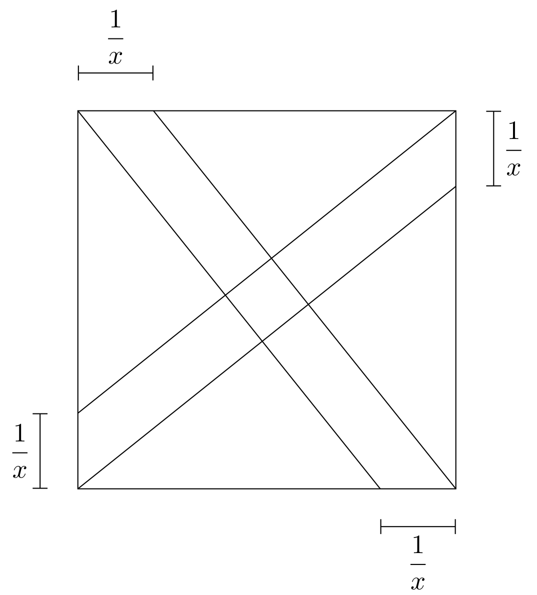
$$f(x) = \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \quad \forall x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right].$$

(a) (3 points) Si $g(x) = -x - \dfrac{\pi}{6}$ et $h(x) = \dfrac{2}{\sin 2x} + \cos x$, montrer que $f(x) = h(g(x))$.

(b) (2 points) A l'aide du point précédent, déterminer la plus grande valeur atteinte par f sur le domaine donné.

Question 4 .... **5 points**

A l'intérieur d'un carré d'aire égale à 1, on construit un plus petit carré en reliant chaque sommet à un point du carré qui se trouve à une distance $\frac{1}{x}$ du sommet opposé, comme indiqué sur le dessin.



Déterminer la valeur de x si le petit carré à l'intérieur a une aire égale à $\frac{1}{221}$.

Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2023 — Analyse - Trigonométrie - Géométrie — **Série A Partie 1**

4 questions - 3 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	5	5	5	5	20

Question 1 . . . . **5 points**

La fonction g est donnée par

$$g(x) = \int_{-1}^{1} f(u)|x-u|du,$$

où $x \in]-1,1[$ et f est une fonction continue telle que $f(0) = 1$. (On notera que $|x-u|$ désigne la valeur absolue de $x-u$.)

(a) (3 points) Montrer que la dérivée de g est donnée par :

$$g'(x) = \int_{-1}^{x} f(u)du - \int_{x}^{1} f(u)du.$$

Pour $-1 < x < 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-1}^{x} f(u)(x-u)du + \int_{x}^{1} f(u)(u-x)du \\ &= x\int_{-1}^{x} f(u)du - \int_{-1}^{x} f(u)udu + \int_{x}^{1} uf(u)dx - x\int_{x}^{1} f(u)du. \end{aligned}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_{-1}^{x} f(u)du + xf(x) - xf(x) - xf(x) - \int_{x}^{1} f(u)du + xf(x) \\ &= \int_{-1}^{x} f(u)du - \int_{x}^{1} f(u)du. \end{aligned}$$

(b) (2 points) Déterminer la dérivée seconde de la fonction g en $x = 0$.

$g''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$ et donc $g''(0) = 2f(0) = 2$.

Question 2 . . . . **5 points**

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ en commençant par le changement de variable $x = \pi - y$.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-y)\sin(\pi-y)}{1+\cos^2(\pi-y)}(-dy)$$

$\sin(\pi - y) = \sin y, \quad \cos(\pi - y) = -\cos y$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{1+\cos^2(y)} dy - \int_0^\pi \frac{y\sin(y)}{1+\cos^2(y)} dy$$

$z = \cos y$

$$\begin{aligned}
&= -\pi \int_1^{-1} \frac{1}{1+z^2} dz - I \\
&= \pi \left[\arctan(z)\right]_{-1}^{1} - I \\
&= \pi \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) - I.
\end{aligned}$$

De là

$$2I = \frac{\pi^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi^2}{4}.$$

Question 3 .... 5 points

On donne la fonction

$$f(x) = \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \quad \forall x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right].$$

(a) (3 points) Si $g(x) = -x - \dfrac{\pi}{6}$ et $h(x) = \dfrac{2}{\sin 2x} + \cos x$, montrer que $f(x) = h(g(x))$.

Méthode 1 (en utilisant la fonction $\cot = \frac{1}{\tan}$**)** Vu l'indentité $\tan\alpha = \cot(\pi/2 - \alpha)$, on a

$$\tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{2\pi}{3})\right) = \cot\left(-x - \frac{\pi}{6}\right).$$

En remarquant que tan est impaire et cos est paire, on peut écrire

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cot(g(x)) + \tan(g(x)) + \cos(g(x)) \\
&= \frac{\cos(g(x))}{\sin(g(x))} + \frac{\sin(g(x))}{\cos(g(x))} + \cos(g(x)) \\
&= \frac{2(\cos^2(g(x)) + \sin^2(g(x)))}{2\sin(g(x))\cos(g(x))} + \cos(g(x)) \\
&= \frac{2}{\sin(2g(x))} + \cos(g(x)) \\
&= h(g(x)).
\end{aligned}$$

Méthode 2 (sans utiliser la fonction cot**)** On obtient d'abord une expression pour $h(g(x))$:

$$h(g(x)) = \frac{2}{\sin\left(-2x - \frac{2\pi}{6}\right)} + \cos\left(-x - \frac{\pi}{6}\right).$$

On écrit ensuite $f(x)$ uniquement avec des sinus et des cosinus:

$$f(x) = \frac{\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)} - \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Comme la fonction cos est paire, le dernier terme dans l'expression de $h(g(x))$ est égal au dernier terme de $f(x)$. On doit vérifier que

$$\frac{2}{\sin\left(-2x - \frac{2\pi}{6}\right)} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)} - \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

On regarde le membre de droite et on commence par une mise au même dénominateur:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)} - \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} &= \frac{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}-x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)}
\end{aligned}$$

en utilisant l'identité $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{5\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{2}{\sin\left(-2x-\frac{2\pi}{6}\right)}.
\end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait obtenir.

(b) (2 points) A l'aide du point précédent, déterminer la plus grande valeur atteinte par f sur le domaine donné.

On a $x \in \left[-\dfrac{5\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$ et donc

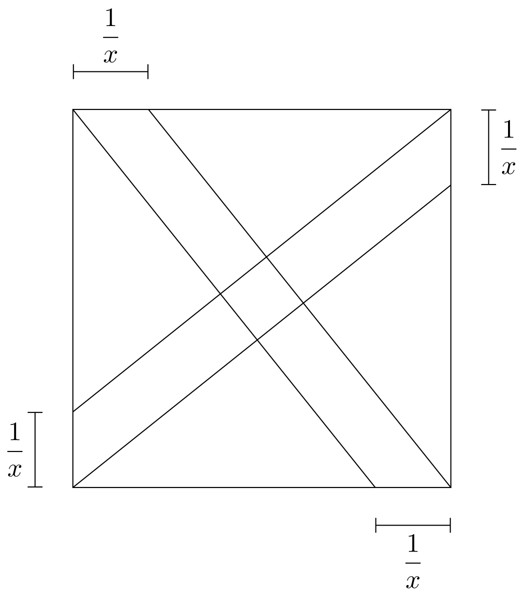
- on voit $g(x) \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ et sur ce domaine la fonction cos est décroissante;
- on voit $2g(x) \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sur ce domaine la fonction $\frac{1}{\sin}$ est décroissante.

La plus grande valeur de f sur le domaine donné est donc égale à la valeur de h évaluée en $g(x) = \frac{\pi}{6}$:

$$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11}{6}\sqrt{3}.$$

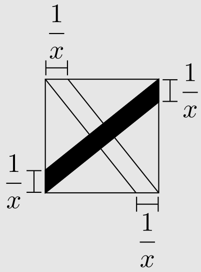
Question 4 .... **5 points**

A l'intérieur d'un carré d'aire égale à 1, on construit un plus petit carré en reliant chaque sommet à un point du carré qui se trouve à une distance $\frac{1}{x}$ du sommet opposé, comme indiqué sur le dessin.



Déterminer la valeur de x si le petit carré à l'intérieur a une aire égale à $\frac{1}{221}$.

On note A l'aire du parallélogramme colorié sur la figure:



On peut appliquer la formule de l'aire du parallélogramme de deux façons différentes:

$$A = \text{base} \times \text{ hauteur} = \frac{1}{x}1 = \sqrt{1^2 + (1 - 1/x)^2}\frac{1}{\sqrt{221}},$$

avec dans la dernière expression, la hauteur qui est donnée par le côté du petit carré.

On obtient une équation quadratique $x^2 - x - 110 = 0$ dont le discriminant vaut $441 = 21^2$. Les solutions sont $x = 11$ ou $x = -10$ (à rejeter).

2023 — **Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL** — **Série A Partie 2**

Algèbre - Géométrie analytique - Probabilités

4 questions - 3 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	5	5	5	5	20

Question 1 .... **5 points**

(a) (2 points) Trouver un polynôme $p(x)$ de degré 4 et dont le coefficient du terme constant vaut 0, et qui est tel que $p(x) - p(x-1) = x^3$.

(b) (1 point) En utilisant la sous-question **(a)**, calculer $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3$.

(c) (2 points) Calculer la somme

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + 199^2.$$

Indication: on pourra reproduire la méthode des sous-questions **(a)** et **(b)**. La première étape sera de déterminer un polynôme de degré 3 approprié.

Question 2 .... **5 points**

Déterminer toutes les valeurs entières de α dans l'intervalle $[0°, 90°]$ telles que $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^{20}$ est un nombre réel.

Question 3 .... **5 points**

La droite d'équation $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ rencontre le cercle d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$ aux points A et B.

(a) (2 points) Déterminer, en fonction du paramètre $\alpha \in [0, 2\pi]$, la distance entre la droite AB et le point $P(3\cos\alpha, 3\sin\alpha)$.

(b) (3 points) Déterminer tous les points P sur le cercle tels que l'aire du triangle PAB est maximale.

Question 4 .... **5 points**

Un tournoi d'escrime international à élimination directe compte 64 participants, dont 8 représentants de l'Ecole Royale Militaire (ERM). Dans le tableau des combats (représenté ci-dessous) le premier tour est rempli complètement au hasard.

(a) (1 point) Montrer qu'il y a 105 façons de répartir 8 personnes en 4 groupes de 2 personnes, si l'ordre des groupes et l'ordre au sein des groupes n'ont pas d'importance.

(b) (2 points) Quelle est la probabilité qu'aucun combat n'oppose deux représentants de l'ERM au premier tour ?

(c) (2 points) Quelle est la probabilité que les représentants de l'ERM ne puissent pas s'affronter avant les quarts de finale ?

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	5	5	5	5	20

Question 1 .... 5 points

(a) (2 points) Trouver un polynôme $p(x)$ de degré 4 et dont le coefficient du terme constant vaut 0, et qui est tel que $p(x) - p(x-1) = x^3$.

On écrit $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$. La condition est

$$p(x) - p(x-1) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - \big(a(x-1)^4 + b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1)\big) = x^3.$$

Identification des coefficients:

$$\begin{array}{ll} (x^4) & a - a = 0 \\ (x^3) & b - 4a + b = 1 \\ (x^2) & c - 6a + 3b - c = 0 \\ (x^1) & d + 4a - 3b + 2c - d = 0 \\ (x^0) & -a + b - c + d = 0 \end{array}$$

De là

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{4}, \quad d = 0.$$

Donc

$$p(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2.$$

(b) (1 point) En utilisant la sous-question **(a)** calculer $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3$.

$$\begin{aligned} 1^3 &= p(1) - p(0) \\ 2^3 &= p(2) - p(1) \\ 3^3 &= p(3) - p(2) \\ &\vdots \\ 99^3 &= p(99) - p(98) \\ 100^3 &= p(100) - p(99). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+3^3+\ldots+100^3 &= p(100)-p(0)=p(100) \\ &= \frac{1}{4}100^4+\frac{1}{2}100^3+\frac{1}{4}100^2 \\ &= 25\,000\,000+500\,000+2\,500=25\,502\,500. \end{aligned}$$

(c) (2 points) Calculer la somme

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+199^2.$$

Indication: on pourra reproduire la méthode des sous-questions **(a)** et **(b)**. La première étape sera de déterminer un polynôme de degré 3 approprié.

On doit trouver un polynôme $q(x)$ tel que

$$q(x)-q(x-1)=(2x-1)^2.$$

Une fois qu'on a trouvé $q(x)$, la somme est donnée par

$$q(1)-q(0)+q(2)-q(1)+q(3)-q(2)+q(4)-q(3)+\ldots+q(100)-q(99)=q(100)-q(0).$$

On prodèce à nouveau par identification pour trouver les coefficients de

$$q(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x.$$

Le terme indépendant est libre, on le prend à nouveau égal à zéro.
A partir de $q(x)-q(x-1)=(2x-1)^2$ on déduit les équations suivantes:

$$\begin{array}{ll} (x^3) & \alpha-\alpha=0 \\ (x^2) & \beta+3\alpha-\beta=0 \\ (x^1) & \gamma-3\alpha+2\beta-\gamma=0 \\ (x^0) & \alpha-\beta+\gamma=0 \end{array}$$

De là,

$$\alpha=\frac{4}{3},\qquad \beta=0,\qquad \gamma=-\frac{1}{3}.$$

On a donc trouvé $q(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}x$. La somme vaut

$$\begin{aligned} q(100)-q(0) &= q(100) \\ &= \frac{4}{3}(100)^3-\frac{1}{3}(100) \\ &= \frac{3}{3}(100)^3+\frac{1}{3}(100^3-100) \\ &= 1\,000\,000+\frac{1}{3}999\ 900 \\ &= 1\,333\,300. \end{aligned}$$

Question 2 .... 5 points

Déterminer toutes les valeurs entières de α dans l'intervalle $[0°, 90°]$ telles que $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{20}$ est un nombre réel.

Le nombre donné se trouve dans le plan complexe sur le cercle de rayon 1. Il y a deux cas possibles:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{20}=1 \qquad \text{ou} \qquad (\cos\alpha+i\sin\alpha)^{20}=-1.$$

On peut combiner les deux cas en une seule équation:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{40}=1.$$

Il y a 40 solutions qui sont de la forme

$$\operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{40}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 39.$$

où on rappelle les notations $\operatorname{cis}(x) = \exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$. Vu que $\alpha \in [0°, 90°]$ on ne doit considérer que les valeurs de k telles que

$$0 \leq \frac{2k\pi}{40} \leq \frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire $0 \leq \frac{k}{10} \leq 1$, ou encore $0 \leq k \leq 10$. Les valeurs de α sont données par:

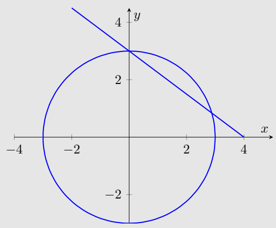
$$\alpha_k = k\frac{\pi}{20}\frac{180°}{\pi} = 9k°, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Question 3 . . . . **5 points**

La droite d'équation $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ rencontre le cercle d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$ aux points A et B.

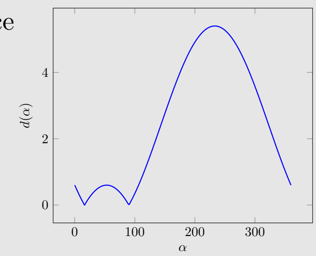
(a) (2 points) Déterminer, en fonction du paramètre $\alpha \in [0, 2\pi]$, la distance entre la droite AB et le point $P(3\cos\alpha, 3\sin\alpha)$.

On commence par un schéma.



On utilisera directement la formule pour la distance point-droite:

$$\begin{aligned} d(\alpha) &= \frac{|3(3\cos\alpha) + 4(3\sin\alpha) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|9\cos\alpha + 12\sin\alpha - 12|}{5}. \end{aligned}$$



(b) (3 points) Déterminer tous les points P sur le cercle tels que l'aire du triangle PAB est maximale.

L'aire du triangle est donnée par

$$\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}||d(\alpha).$$

Cette aire est maximale lorsque $d(\alpha)$ est maximale. On dérive par rapport à α sans se préoccuper de la valeur absolue, et la dérivée s'annule si

$$\frac{1}{5}\left(-9\sin\alpha + 12\cos\alpha\right),$$

ce qui donne

$$\tan\alpha = \frac{4}{3}.$$

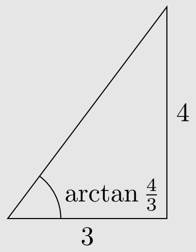
On trouve donc $\alpha = \arctan\frac{4}{3}$ (aire minimale) ou $\alpha = \arctan\frac{4}{3} + \pi$ (aire maximale). Le point correspondant à l'aire maximale est

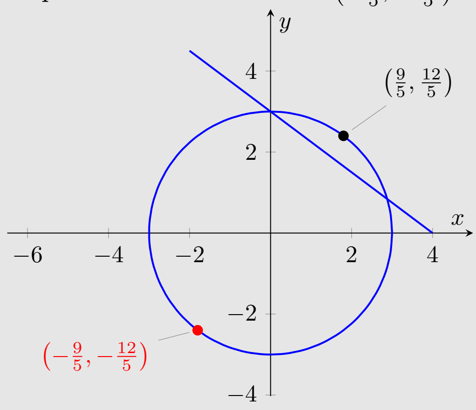
$$\left(3\cos\left(\arctan\frac{4}{3} + \pi\right), 3\sin\left(\arctan\frac{4}{3} + \pi\right)\right) = \left(-3\cos\arctan\frac{4}{3}, -3\sin\arctan\frac{4}{3}\right).$$

On simplifie ensuite l'expression:

$$\cos \arctan \frac{4}{3} = \frac{3}{5}$$
$$\sin \arctan \frac{4}{3} = \frac{4}{5}.$$

Le point recherché est donc $\left(-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.





Question 4 . . . . 5 points

Un tournoi d'escrime international à élimination directe compte 64 participants, dont 8 représentants de l'Ecole Royale Militaire (ERM). Dans le tableau des combats (représenté ci-dessous) le premier tour est rempli complètement au hasard.

(a) (1 point) Montrer qu'il y a 105 façons de répartir 8 personnes en 4 groupes de 2 personnes, si l'ordre des groupes et l'ordre au sein des groupes n'ont pas d'importance.

- On place les 8 personnes sur une rangée. Il y a 8! possibilités.
- On fait un groupe avec les deux premiers, puis un autre groupe avec les deux suivants, et ainsi de suite.
- Comme l'ordre au sein des groupes n'a pas d'importance, on doit diviser 8! par 2^4. Comme l'ordre

des groupes n'a pas d'importance, on doit encore diviser par 4!.

La réponse à la question est

$$\frac{8!}{4!\,2^4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{16} = 7 \times 3 \times 5 = 105.$$

(b) (2 points) Quelle est la probabilité qu'aucun combat n'oppose deux représentants de l'ERM au premier tour ?

- Première méthode

  Cas possibles. En suivant le raisonnement de la sous-question **(a)**, on trouve

  $$\frac{64!}{32!\,2^{32}}$$

  possibilités pour déterminer quels seront les combats du premier tour (sans tenir compte de la suite de la compétition).

  Cas favorables. On suppose que l'on a classé les représentants de l'ERM du 1er au 8e.

  – Il y a 56 adversaires possibles pour le premier représentant de l'ERM, et 55 adversaires possibles pour le suivant, jusqu'à 49 adversaires possibles pour le 8e représentant de l'ERM: on trouve donc

  $$56 \times 55 \times \ldots \times 49 = \frac{56!}{48!}$$

  façons de choisir les adversaires des représentants de l'ERM.

  – Il reste ensuite 48 participants, que l'on groupe deux par deux, et il y a comme précédemment

  $$\frac{48!}{24!\,2^{24}}$$

  façons de les grouper.

  Dès lors,

  $$\#\text{ cas favorables} = \frac{56!}{24!\,2^{24}}.$$

  Réponse. La réponse à la question est donc

  $$\frac{\#\text{ cas favorables}}{\#\text{ cas possibles}} = \frac{56!\,32!\,2^{32}}{64!\,24!\,2^{24}} = \frac{(32 \times 31 \times \ldots \times 25)2^8}{64 \times 63 \times \ldots \times 57}.$$

- Seconde méthode

  On compte les cas favorables et les cas possibles en considérant que l'ordre des groupes, et l'ordre au sein des groupes ont de l'importance.

  Cas possibles. Il y a 64! façons de remplir le tableau.

  Cas favorables. – Pour le premier membre de l'ERM, il y a 64 places. Pour le second, 62 places (comme il ne peut pas être opposé au premier). Pour le troisième, il y a 60 possibilités, et ainsi de suite jusqu'à 50 possibilités pour placer le 8e membre.

  – Il y a 56! façons de placer les 56 participants restants dans les 56 places restantes.

  Réponse. La probabilité est

  $$\frac{\#\text{ cas favorables}}{\#\text{ cas possibles}} = \frac{(64 \times 62 \times \ldots \times 50)56!}{64!} = \frac{(32 \times 31 \times \ldots \times 25)2^8}{64 \times 63 \times \ldots \times 57}.$$

(c) (2 points) Quelle est la probabilité que les représentants de l'ERM ne puissent pas s'affronter avant les quarts de finale ?

Il faut que pami les 8 premières places du tableau de départ il y ait un membre de l'ERM et 7 autres compétiteurs, puis à nouveau un membre de l'ERM et 7 autres compétiteurs dans les 8 places suivantes, et ainsi de suite.

- Première méthode

  Cas possibles. On répartit les 64 participants en 8 groupes de 8, sachant que l'ordre des groupes et l'ordre au sein des groupes ne sont pas importants. Le nombre de possibilités est

$$\frac{64!}{8!(8!)^8} = \frac{64!}{(8!)^9}.$$

On a divisé par 8! parce que l'ordre des groupes n'est pas important, et on a divisié par $(8!)^8$ parce que l'ordre au sein des groupes n'est pas important.

Cas favorables. On répartit les 8 représentants de l'ERM dans les différents groupes, ce qui se fait de 8! manières différentes. Il reste à répartir les 56 autres participants entre ces 8 morceaux de tableau. Il y a $\frac{56!}{(7!)^8\, 8!}$ façons de le faire. On divise par $(7!)^8$ pour ne pas tenir compte de l'ordre au sein des groupes, et on divise par 8! vu que l'ordre des groupes n'est pas important. Le nombre de cas favorables est donc

$$\#\text{ cas favorables} = \frac{8!\, 56!}{(7!)^8\, 8!} = \frac{56!}{(7!)^8}.$$

Réponse. La probabilité recherchée est donc

$$\frac{56!}{(7!)^8}\frac{(8!)^9}{64!} = \frac{56!\, 8!}{64!}8^8.$$

- Seconde méthode

  On compte les cas favorables et les cas possibles en considérant que l'ordre des groupes, et l'ordre au sein des groupes ont de l'importance.

  Cas possibles. Il y a 64! façons de remplir le tableau de départ.

  Cas favorables.
  - Il y a 8! façons de placer les représentants de l'ERM dans les 8e de tableau. Dans chaque 8e de tableau il y a 8 places possibles pour le représentant de l'ERM. Il y a donc $8!\, 8^8$ façons de placer les 8 représentants.
  - Pour les autres compétiteurs, il reste 56 places vides. Il y a 56! façons de les remplir.

  Dès lors,

  $$\#\text{ cas favorables } = 56!8!\, 8^8.$$

  Réponse. La probabilité est: $\frac{56!\, 8!}{64!}8^8$.

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	4	5	6	5	20

Question 1 — 4 points

(a) (2 points) Représenter dans un même système d'axes le graphe des fonctions suivantes, avec $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{1+|x-2|}.$$

(b) (2 points) Trouver la valeur maximale de $\dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-2|}$ sachant que $x \in \mathbb{R}$.

Question 2 — 5 points

Calculer

$$\int \frac{1}{1+e^x+e^{-x}}dx$$

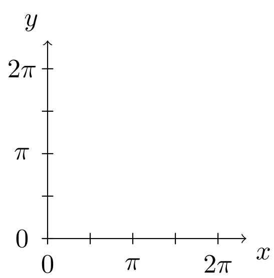
en commençant par une substitution $u = e^x$.

Question 3 — 6 points

(a) (3 points) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation suivante, et représenter les angles correspondants sur le cercle trigonométrique :

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$$

(b) (2 points) Résoudre l'équation $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y$, sachant que $x, y \in [0, 2\pi]$ et représenter les solutions dans le plan (x, y) en utilisant un repère comme celui ci-dessous (à reproduire sur votre feuille) :



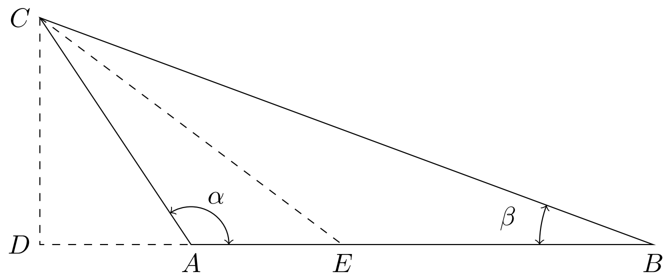
(c) (1 point) Combien y a-t-il de couples (x, y) différents qui sont solution du système

$$\begin{cases} \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0 \\ \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y \end{cases}$$

sachant que $x, y \in [0, 2\pi]$? Représenter ensuite ces solutions dans un système d'axes comme à la sous-question (b).

Question 4 ——— **5 points**

Dans le triangle ABC (voir figure), D est le point d'intersection entre la hauteur issue de C et le prolongement du côté $[AB]$, et E est le point d'intersection entre la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ et le côté $[AB]$, et $\alpha > \frac{\pi}{2}$.



(a) (1 point) Exprimer l'angle $\widehat{DCE}$ en fonction de α et β.

(b) (4 points) Si $|AD| = |AE|$, prouver que

$$\tan^3 \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1.$$

Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2024 Analyse - Trigonométrie - Géométrie **Série B Partie 1**

4 questions - 3 heures

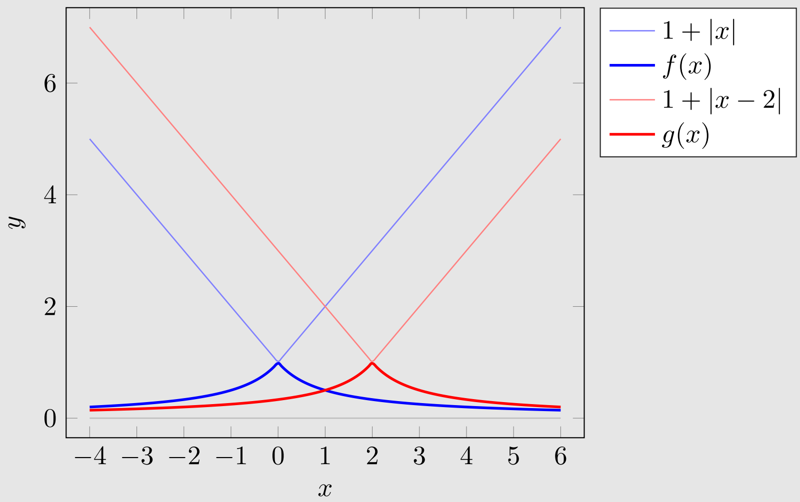
1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	4	5	6	5	20

Question 1 **4 points**

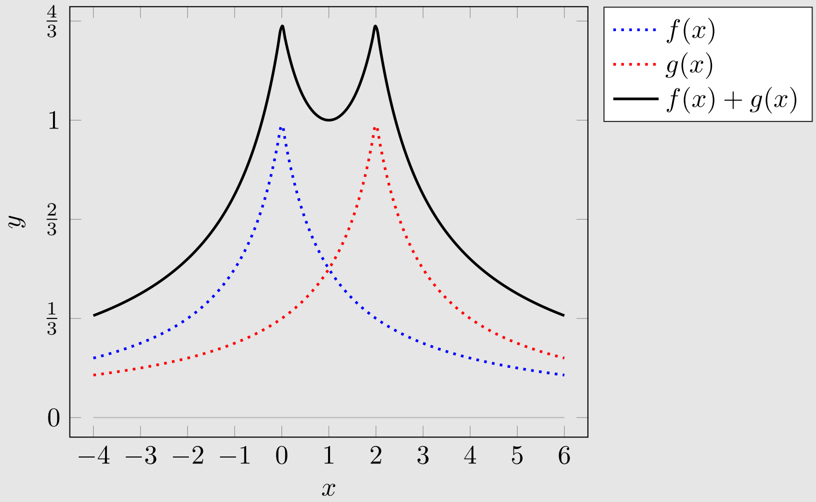
(a) (2 points) Représenter dans un même système d'axes le graphe des fonctions suivantes, avec $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{1+|x-2|}.$$



(b) (2 points) Trouver la valeur maximale de $\dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-2|}$ sachant que $x \in \mathbb{R}$.

Le graphique de la fonction $x \mapsto f(x) + g(x)$ est obtenu par construction à partir des graphiques de $f(x)$ et $g(x)$.



On observe que la valeur maximale est prise lorsque $0 \leq x \leq 2$. (On peut raisonner graphiquement, ou vérifier que le signe de la dérivée est positif si $x < 0$ et négatif si $x > 2$.)
Sur cet intervalle,

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2-x} = \frac{4}{(1+x)(3-x)} = \frac{4}{-x^2+2x+3}.$$

Le graphique de $-x^2+2x+3$ est une parabole ouverte vers le bas, et donc le graphique de $f(x)+g(x)$ est ouvert vers le haut. Il y s'agit donc d'un minimum en $x = 1$ (qui est la valeur de x qui annule $f'(x) + g'(x) = 4\frac{2x-2}{(-x^2+2x+3)^2}$) et la valeur maximale est prise aux bords de l'intervalle, en $x = 0$ ou en $x = 2$:

$$f(0) + g(0) = \frac{1}{1+0} + \frac{1}{3-0} = \frac{4}{3}.$$

Question 2 **5 points**

Calculer

$$\int \frac{1}{1+e^x+e^{-x}} dx$$

en commençant par une substitution $u = e^x$.

On pose $u = e^x$, et donc $du = e^x dx = u dx$. L'intégrale devient

$$\int \frac{1}{1+e^x+e^{-x}} dx = \int \frac{1}{1+u+\frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int \frac{du}{u^2+u+1}.$$

On complète le carré :

$$u^2+u+1 = \left(u^2 + 2u\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Si on pose $v = u + \frac{1}{2}$ l'intégrale devient

$$\int \frac{dv}{v^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dv}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}v\right)^2 + 1}$$

On pose $w = \frac{2}{\sqrt{3}}v$. L'intégrale s'écrit

$$\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dw}{w^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan w + \text{const.}$$

On effectue la substitution inverse :

$$w = \frac{2}{\sqrt{3}}v = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(u + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^x + \frac{1}{2}\right)$$

ce qui mène à la réponse finale

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}\,(2e^x+1)}{3}\right) + \text{const.}$$

Question 3 ________________________________ **6 points**

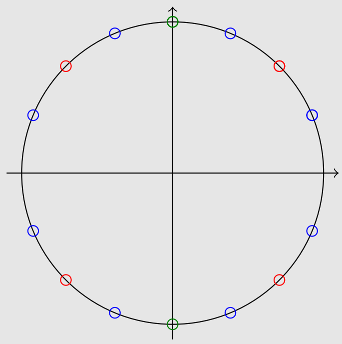
(a) (3 points) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation suivante, et représenter les angles correspondants sur le cercle trigonométrique :

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$$

En utilisant les formules d'addition, on commence par résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& \boxed{\cos x} + \cos 3x + \cos 5x + \boxed{\cos 7x} = 0 \\
\iff\; & \boxed{2\cos 4x \cos 3x} + 2\cos 4x \cos x = 0 \\
\iff\; & 2\cos 4x\,(\cos x + \cos 3x) = 0 \\
\iff\; & 4\cos 4x \cos 2x \cos x = 0 \\
\iff\; & x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + k'\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k''\pi, \quad (k, k', k'' \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Sur le cercle trigonométrique on représente les angles correspondant à ces valeurs de x

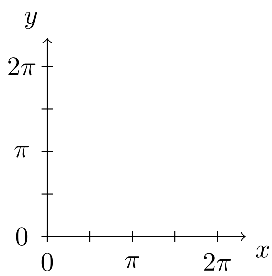


Il y a 14 solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$:

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + k'\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k''\pi$$

avec $k = 0, \ldots 7$ (8 solutions), $k' = 0, \ldots, 3$ (4 solutions), $k'' \in \{0\,,\,1\}$ (2 solutions).

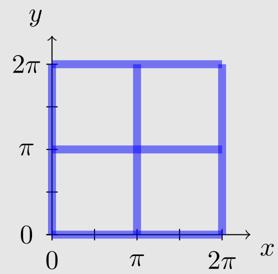
(b) (2 points) Résoudre l'équation $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y$, sachant que $x, y \in [0, 2\pi]$ et représenter les solutions dans le plan (x, y) en utilisant un repère comme celui ci-dessous (à reproduire sur votre feuille) :



On résoud d'abord dans $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
& \cos(x+y) = \cos x \cos y \\
\iff & \cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos x \cos y \\
\iff & \sin x \sin y = 0 \\
\iff & x = \ell\pi \quad \vee \quad y = \ell'\pi \quad (\ell, \ell' \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

Vu que $x, y \in [0, 2\pi]$, les solutions sont tous les couples $(0, y), (\pi, y), (2\pi, y)$ avec $y \in [0, \pi]$ et tous les couples $(x, 0), (x, \pi), (x, 2\pi)$ avec $x \in [0, 2\pi]$ représentés en bleu ci-dessous :

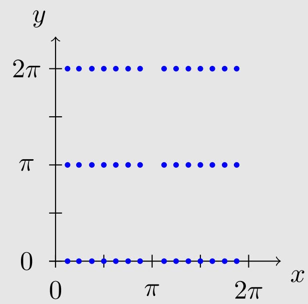


(c) (1 point) Combien y a-t-il de couples (x, y) différents qui sont solution du système

$$
\begin{cases}
\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0 \\
\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y
\end{cases}
$$

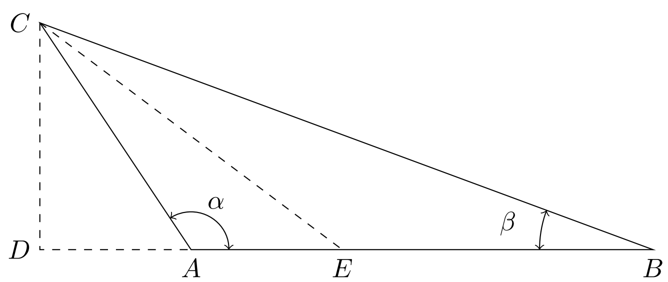
sachant que $x, y \in [0, 2\pi]$? Représenter ensuite ces solutions dans un système d'axes comme à la sous-question (b).

Le nombre de solutions est $14 \times 3 = 42$ puisque pour chaque solution x de l'équation de la question (a) il y a trois valeurs possibles de y. Elle sont représentées comme suit :

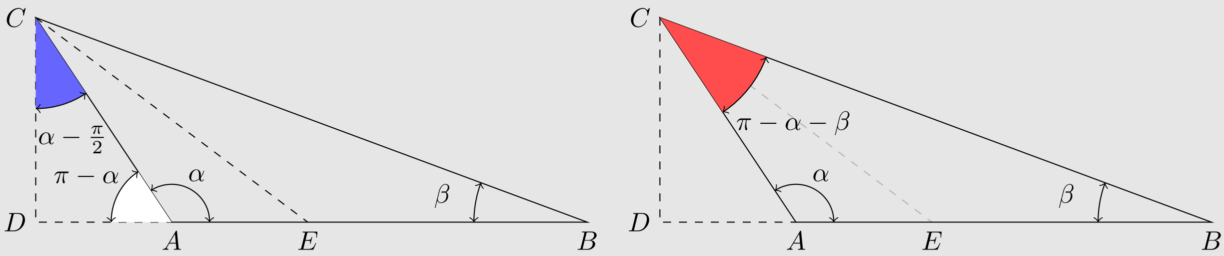


Question 4 **5 points**

Dans le triangle ABC (voir figure), D est le point d'intersection entre la hauteur issue de C et le prolongement du côté $[AB]$, et E est le point d'intersection entre la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ et le côté $[AB]$, et $\alpha > \frac{\pi}{2}$.



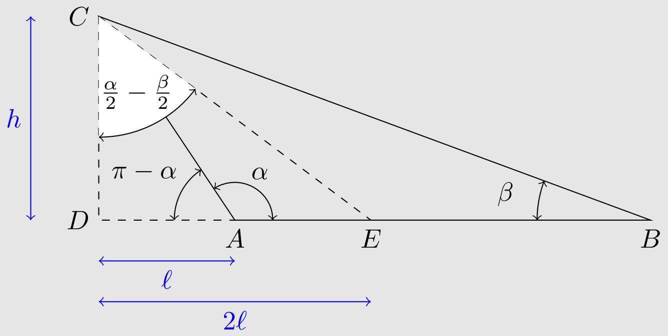
(a) (1 point) Exprimer l'angle $\widehat{DCE}$ en fonction de α et β.



$$\widehat{DCE} = \alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

(b) (4 points) Si $|AD| = |AE|$, prouver que

$$\tan^3 \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1.$$



Soit $x = \tan \dfrac{\alpha}{2}, \quad y = \tan \dfrac{\beta}{2}$. Dans le triangle:

$$\begin{aligned} \frac{2\ell}{h} &= \tan \widehat{DCE} = \tan\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{x-y}{1+xy} \\ \frac{h}{\ell} &= \tan \widehat{CAD} = \tan(\pi - \alpha) = -\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{2x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} \frac{2\ell}{h} &= \frac{x-y}{1+xy} = 2\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) \\ \Rightarrow \quad x^2 - xy &= x^2 - 1 + x^3 y - xy \\ \Rightarrow \quad x^3 y &= 1. \end{aligned}$$

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	6	5	4	5	20

Question 1 ——— **6 points**

Le polynôme $p(z) = z^3 + 2z^2 + 7z + 1$ admet trois racines z_1, z_2 et z_3 dans $\mathbb{C}$.

Remarque : pour cette question il n'est pas nécessaire de calculer ces trois racines.

(a) (2 points) Déterminer le signe de chacune des éventuelles racines réelles de $p(z)$.

(b) (2 points) Montrer que $z_1 + z_2 + z_3 = -2$. Indication: écrire $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

(c) (1 point) Montrer que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -10$ à l'aide de la sous-question (b).

(d) (1 point) Calculer $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$. Indication : se servir de la somme $p(z_1) + p(z_2) + p(z_3)$.

Question 2 ——— **5 points**

(a) (1 point) Ecrire le nombre complexe $(1 - i)^6$ sous la forme algébrique $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) (2 points) Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 = 8i$, sous forme algébrique.

(c) (2 points) Calculer la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$. On pourra s'aider de la sous-question précédente.

Question 3 ——— **4 points**

On donne deux points $A(-6, 0)$ et $B(2, 0)$ dans un système de coordonnées (x, y). On s'intéresse au lieu géométrique de tous les points P qui satisfont à la condition

$$\frac{|AP|}{|BP|} = 3,$$

où la notation $|XY|$ représente la longueur du segment de droite joignant deux points X et Y.

(a) (1 point) Faire un schéma représentant A, B et une position possible du point P.

(b) (3 points) Trouver l'équation cartésienne du lieu géométrique, en partant de la condition donnée dans l'énoncé. Donner le détail des calculs.

Question 4 ——— **5 points**

(a) (2 points) Combien de tableaux différents avec 4 lignes et 4 colonnes et où chaque case contient soit 0 soit 1 ont la propriété que la somme des cases est égale à 8 ?

(b) (3 points) Combien de tableaux différents avec 4 lignes et 4 colonnes et où chaque case contient soit 0 soit 1 ont la propriété que la somme des cases de chaque ligne est 2 et que la somme des cases de chaque colonne est 2 ?

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	6	5	4	5	20

Question 1 — 6 points

Le polynôme $p(z) = z^3 + 2z^2 + 7z + 1$ admet trois racines z_1, z_2 et z_3 dans $\mathbb{C}$.
Remarque : pour cette question il n'est pas nécessaire de calculer ces trois racines.

(a) (2 points) Déterminer le signe de chacune des éventuelles racines réelles de $p(z)$.

$\deg(p(z)) = 3 \quad \Rightarrow$ 1 ou 3 racines réelles.

$$p'(x) = 3x^2 + 4x + 7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\Delta = 16 - 84 < 0) \qquad \Rightarrow \qquad p(x) \nearrow, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

On peut écrire que $z_1 \in \mathbb{R}$, $z_2, z_3 \notin \mathbb{R}$.
On va déterminer $\operatorname{sign}(z_1)$.
Méthode 1 $p(-1) = -5 < 0$, $p(0) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sign}(z_1) = -1$ (théorème de la valeur intermédiaire).
Méthode 2 Algébriquement,

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + 2z^2 + 7z + 1 \quad \Rightarrow \quad -z_1 z_2 z_3 = 1.$$

Vu que $z_2 z_3 = z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2 > 0$, on obtient $z_1 < 0$.

(b) (2 points) Montrer que $z_1 + z_2 + z_3 = -2$. Indication: écrire $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + 2z^2 + 7z + 1.$$

Par identification des coefficients:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -2$$
$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 7.$$

(c) (1 point) Montrer que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -10$ à l'aide de la sous-question (b).

(b) $\quad \Rightarrow \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) = 4 - 14 = -10.$

(d) (1 point) Calculer $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$. Indication : se servir de la somme $p(z_1) + p(z_2) + p(z_3)$.

$$p(z_1) + p(z_2) + p(z_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 2\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right) + 7\left(z_1 + z_2 + z_3\right) + 3 = 0,$$

Avec **(b)**, **(c)**:

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 20 + 14 - 3 = 31.$$

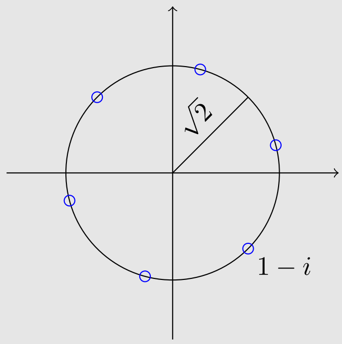
Question 2 — 5 points

(a) (1 point) Ecrire le nombre complexe $(1 - i)^6$ sous la forme algébrique $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

$(1-i)^6 = \left(\sqrt{2}\ \text{cis}(-\pi/4)\right)^6 = 8\ \text{cis}(-3\pi/2) = 8i.$

(b) (2 points) Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 = 8i$, sous forme algébrique.

We already have found one solution $1-i$, which lies on the circle with radius $\sqrt{2}$, pictured below. The other solutions are located on the same circle. The angular spacing is $\frac{\pi}{3}$.



The six solutions are:

$$\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}\right)\right), \quad k=0,1,\ldots,5.$$

(c) (2 points) Calculer la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$. On pourra s'aider de la sous-question précédente.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Re\left\{(1-i)\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Re\left\{(1-i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Question 3 — **4 points**

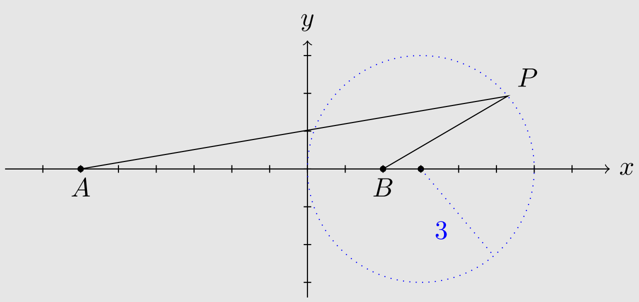
On donne deux points $A(-6,0)$ et $B(2,0)$ dans un système de coordonnées (x,y). On s'intéresse au lieu géométrique de tous les points P qui satisfont à la condition

$$\frac{|AP|}{|BP|} = 3,$$

où la notation $|XY|$ représente la longueur du segment de droite joignant deux points X et Y.

(a) (1 point) Faire un schéma représentant A, B et une position possible du point P.

N'importe quel point sur le cercle en pointillés répond à la condition:



(b) (3 points) Trouver l'équation cartésienne du lieu géométrique, en partant de la condition donnée dans l'énoncé. Donner le détail des calculs.

On utilise la formule qui donne la distance entre deux points pour traduire la condition:

$$\sqrt{(x+6)^2+y^2} = 3\sqrt{(x-2)^2+y^2}.$$

On élève au carré:

$$x^2 + 12x + 36 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2,$$

et on regroupe les termes et on divise par 8:

$$x^2 - 6x + y^2 = 0.$$

Cette équation s'écrit

$$(x-3)^2 + y^2 = 9.$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $(3, 0)$ et de rayon 3.

Question 4 **5 points**

(a) (2 points) Combien de tableaux différents avec 4 lignes et 4 colonnes et où chaque case contient soit 0 soit 1 ont la propriété que la somme des cases est égale à 8 ?

La moitié des cellules doit contenir "1" et l'autre moitié "0". Le nombre de tableaux différents correspond aux $\binom{16}{8} = \frac{16!}{8!\,8!}$ façons de choisir les 8 cellules qui contiennent "1".

(b) (3 points) Combien de tableaux différents avec 4 lignes et 4 colonnes et où chaque case contient soit 0 soit 1 ont la propriété que la somme des cases de chaque ligne est 2 et que la somme des cases de chaque colonne est 2 ?

On sépare les cas en se basant sur le tableau 2×2 situé en haut à gauche.

	Motif	# de motifs	# de tableaux
Cas 1	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline \text{x} & \text{x} \\ \hline \text{x} & \text{x} \\ \hline\end{array}$	2 choix (uniquement des 1 ou des 0)	1 solution
Cas 2	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$ ou rotation (un seul 0)	4 choix	4 solutions (la ligne et la colonne avec le 0 donnent chacune deux solutions)
Cas 3	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ ou rotation (un seul 1)	4 choix	4 solutions (cf. cas 2)
Cas 4	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$ ou rotation (deux 1 sur la même ligne ou colonne)	4 choix	6 solutions (selon la façon de remplir le tableau 2×2 en haut à droite ou en bas à gauche, il y a une ou deux solutions pour le reste du tableau)
Cas 5	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ ou $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$	2 choix	16 solutions (4 en haut à droite fois 4 en bas à gauche)

Total: $2 \times 1 + 4 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 6 + 2 \times 16 = 2 + 16 + 16 + 24 + 32 = 90$ tableaux différents.